SÉRIE A, N° 4018
N° D'ORDRE :
4869

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Pierre GUIRAUD

1re THÈSE : Recherches sur la théorie hypersonique des petites perturbations.

2e THÈSE : Le problème aux valeurs initiales pour les équations de Navier Stokes

Soutenues le 15 Décembre 1962 devant la Commission d'examen.

MM. MALAVARD Président.

GERMAIN, LIONS } Examinateurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX
1962

SÉRIE A, N° 4018
N° D'ORDRE :
4869

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Pierre GUIRAUD

1re THÈSE : Recherches sur la théorie hypersonique des petites perturbations.

2e THÈSE : Le problème aux valeurs initiales pour les équations de Navier Stokes.

Soutenues le 15 Décembre 1962 devant la Commission d'examen.

MM. MALAVARD Président.

GERMAIN, LIONS } Examinateurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX
1962

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen . . . . . M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.
PREVOST	T	Chimie organique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.
WYART	T	Minéralogie et Cristal.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie Générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Melle COUSIN	T	Biologie Animale (S.P.C.N.).
CHRETIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIERE	T	Géologie (S.P.C.N.) et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.).
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Melle CAUCHOIS	T	Chimie Physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique Générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres.
QUELET	T	Chimie Organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théories Physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J.P. MATHIEU	T	Physique (Optique).
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral.
CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.
NORMANT	T	Synthèse organique générale.
BENARD	T	Chimie Minérale.
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie Végétale.
MARECHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Melle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Technique mathématique de la Physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Electrotechnique général.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).

....

Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY		Biologie végétale (P.C.B.).
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).
BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation).
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay).
OLMER	T	Energétique générale.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physiologie Vég. (B.M.P.V.).
CASTAING	T	Physique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralo. et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie Végé. (Orsay).
NOIROT	T	Evolution des Etres Org.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie théorique.
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radioactivité.
TONNELAT	T	Biologie Physico-chim.
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches Physiques.
GUINOCHET	T	Biol. Vég. (S.P.C.N.) Orsay.
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
Melle JOSIEN	T	Chimie (S.P.C.N.).
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).
DENY	T	Mathématiques Géné. (Orsay).
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides.
LUCAS G.	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie Physique.
BERTHELOT	T	Phys. Fondamentale des Hautes Energies (Orsay).
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Orsay).
M. JULIA		Etudes des Moléculaires naturelles complexes.
LENDER	T	Biol. Animale (S.P.C.N.) Orsay.
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments.
Melle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
HAÏSSINSKY	T	Radiochimie.
LEMEE	T	Physiol. Vég. (B.M.P.V.) Orsay.
GUERIN	T	Chimie (M.P.C.) Orsay.
CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.).
JEAN	T	Physique Nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S.P.C.N.)
MICHEL L.		Phys. Théor. des Htes Energies (Orsay).
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Electronique (Orsay).
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments (Orsay).
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Méc. Physique.
ELLENBERGER	T	Géologie appli. s/le terr.
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.).
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay).
STOLKOWSKI		Physiologie générale.
ACHER		Chimie Biol. (Orsay).
BAUDOIN		Biologie animale (P.C.B.).
BEAUMONT		Biologie animale (S.P.C.N.).
BLAMONT	T	Géophysique Ionosphère.
BOURREAU		Botanique.
CURIE D.		Physique (M.G.P.).
DURAND-DELGA		Géologie.
FREON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités.
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.).
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.).
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire.
Melle FOURCROY		Biol. végétale (S.P.C.N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méc. céleste.
Melle VEIL		Physiologie Générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique (P.C.B.) Orsay.
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques (M.P.C.) Orsay.
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique.
COMOLET	T	Mécanique des Fluides.
CORABOEUF		Physiologie Animale.
DELLOUE		Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie Animale (P.C.B.).
JULLIEN J.		Chimie (P.C.B.).
MALGRANGE	T	Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE		Physique (E.N.S.) Orsay.
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathématiques ENS féminines.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.

Secrétaire Général . . . . . R. POULLAIN

TABLE DES MATIÈRES

pages

SOMMAIRE 3

INTRODUCTION GÉNÉRALE 3

Chapitre I. LA THÉORIE HYPERSONIQUE DES PETITES PERTURBATIONS

I,1. Introduction 7
I,2. Ecoulement sur un dièdre légèrement déformable 22
I,3. Indications sur l'approximation newtonienne 32

Chapitre II. SUR LA MÉTHODE DE CHOC-DÉTENTE

II,1. Introduction 39
II,2. Exposé systématique 47
II,2.1. *Forme canonique des équations du mouvement* 47
II,2.2. *Nouvelle forme des équations du mouvement, faisant jouer un rôle privilégié aux lignes de courant et aux lignes de Mach montantes* 50
II,2.3. *Esquisse d'un schéma formel d'approximations successives* 58
II,2.4. *La méthode de choc-détente* 61
II,3. Applications 67
II,3.1. *La méthode choc-détente en théorie hypersonique des petites perturbations* 67
II,3.2. *Résolution approchée de l'équation de Volterra du second problème* 68
II,3.3. *Nouvelle formulation* 69
II,3.4. *Représentation de l'onde de choc de tête* 72
II,3.5. *Résultats numériques* 74
II,3.6. *Un exemple numérique* 75
II,4. Ecoulements tridimensionnels 78
II,4.1. *Equations fondamentales de la méthode choc-détente généralisée* 78
II,4.2. *Efforts globaux sur un obstacle de révolution* 80

Chapitre III. THÉORIE HYPERSONIQUE DES PETITES PERTURBATIONS POUR L'ÉCOULEMENT SUR UN OBSTACLE PRÉSENTANT UN NEZ ÉMOUSSÉ

III,1. Introduction 85
III,2. Exposé systématique 94
III,2.1. *Equations générales* 94
III,2.2. *Introduction de la théorie des petites perturbations* 97
III,2.3. *Etude de la couche externe* 100
III,2.4. *Définition d'un second passage à la limite. Notion de couche interne* 103
III,2.5. *Etude détaillée de l'écoulement interne* 106
III,2.6. *Etude du raccord entre les deux couches* 109
III,2.7. *Remarques sur les conditions initiales* 113
III,2.8. *Conclusion. Le problème aux limites fondamental de la théorie des petites perturbations pour un obstacle présentant un nez émoussé* 116
III,3. Applications 119
III,3.1. *Utilisation des approximations tangentielles* 119
III,3.2. *Utilisation de l'approximation newtonienne* 122
III,3.3. *Similitude hypersonique des profils minces à nez émoussés* 125
III,4. Extension aux écoulements tridimensionnels 126

BIBLIOGRAPHIE 133

SOMMAIRE

Après un exposé général de la théorie hypersonique des petites perturbations, et l'examen d'un cas simple –écoulements voisins d'écoulement uniformes par morceaux– l'écoulement supersonique sur un profil convexe est étudié par un procédé d'approximations successives formel. On montre que la première étape de ce processus s'identifie avec la méthode de choc détente de EGGERS et SYVERTSON. La solution présentée pour cette première étape est complète mais ne s'exprime en termes finis et simplement que dans le cadre de la théorie hypersonique des petites perturbations. La théorie des petites perturbations est ensuite reprise pour des obstacles émoussés. On met en évidence que les effets d'émoussements, déjà observés expérimentalement par d'autres auteurs, entraînent une modification fondamentale de la structure d'un écoulement telle qu'elle est décrite par la théorie de HAYES - VAN DYKE, laquelle est seulement valable dans le cas d'une pointe amont parfaitement aiguë. Les modifications qu'il est nécessaire d'apporter sont décrites sous une forme différente de celles dont rend compte schématiquement la théorie de l'explosion.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La présente publication rassemble un certain nombre de résultats obtenus récemment, relatifs à la théorie des écoulements hypersoniques de fluide parfait. Elle tient lieu à la fois de mémoire original, au moins en ce qui concerne les chapitres II et III, dont certaines conclusions ont été indiquées dans quelques notes aux Comptes Rendus, et également de rapport de synthèse. Le but poursuivi explique la forme un peu spéciale de la rédaction. Chacun des trois chapitres est précédé d'une longue introduction qui forme à elle seule un tout capable de se suffire. Le mode d'exposition y est synthétique et intuitif. Ces introductions sont destinées aux lecteurs qui désirent arriver rapidement aux formules les plus significatives, quitte à passer sur les détails des démonstrations. A l'intention de cette catégorie de lecteurs on s'est efforcé de ne laisser passer aucune question importante, et même de fournir des preuves parfaitement convaincantes dans leur principe. Les questions de détail qui n'avaient pu trouver place dans les introductions ont été complètement élucidées dans des exposés systématiques dont chacun reprend la question depuis le début. Il n'y a là rien de fondamentalement nouveau, de sorte que l'on pourra avoir l'impression de redites, mais ces redites étaient nécessaires si l'on voulait d'une part ne laisser aucun point dans l'ombre et d'autre part donner rapidement les résultats essentiels.

En fonction de ces indications, la lecture de la présente publication peut fort bien s'effectuer dans l'ordre suivant : chapitre I section 1, chapitre II sections 1, 3 et 4, chapitre III sections 1, 3 et 4, éventuellement chapitre I sections 2 et 3, chapitre II section 2, chapitre III section 2.

On a dit que le présent travail avait été conçu en partie comme rapport de synthèse; à ce titre il est en partie incomplet. La théorie des écoulements hypersoniques de fluide parfait, pour se limiter à cet aspect des écoulements hypersoniques, comprend au moins deux importants chapitres complémentaires qui sont résolument laissés de côté ici. L'un de ces chapitres est relatif à l'approximation newtonienne, le second est relatif à l'écoulement sur le nez d'un obstacle émoussé, problème plus connu sous le nom de calcul des ondes de choc détachées. Les contributions personnelles de l'auteur dans le premier domaine ont été exposées suffisamment en détail ailleurs [18, 19] pour qu'il ne soit pas nécessaire d'y revenir. D'un autre côté, l'aspect synthétique de ces questions est passée en revue dans le récent livre de HAYES et PROBSTEIN [26], de sorte qu'elles ont été délibérément laissées de côté ici.

Il résulte de ce qui précède que les questions traitées dans ce travail se rattachent à trois chapitres de la théorie des écoulements hypersoniques de fluide parfait : théorie des petites perturbations, théorie des caractéristiques et ses approximations de caractère hypersonique, théorie des écoulements sur des corps minces émoussés. Cette division en trois chapitres est précisément celle de la présente publication. Le chapitre I traite de la théorie hypersonique des petites perturbations sous la forme conventionnelle. Telle quelle, la théorie est essentiellement due à HAYES [25] et VAN DYKE [48]. Le mode d'exposition adopté procède d'une remarque de LEES [34 a] développée dans un cours non publié de P. GERMAIN. Il n'y a là rien d'original, mais il était nécessaire de rappeler les principes de la théorie des petites perturbations pour le reste de ce travail. La section 2 de ce premier chapitre traite des écoulements voisins d'écoulements uniformes par morceaux –écoulements voisins de l'écoulement sur un dièdre–; le problème n'est pas nouveau, mais la méthode de solution est originale. Le chapitre se termine par un exposé de l'approximation newtonienne pour des corps élancés, exposé qui était nécessaire pour certain passage du chapitre III. Le second chapitre est consacré à la théorie des caractéristiques sous la forme de la méthode de choc détente. Cette méthode n'est pas nouvelle encore une fois, mais elle est abordée ici en partant d'un point de vue tout différent de celui sous lequel elle est présentée habituellement. Au lieu de la considérer comme une méthode simplement approchée relativement à la méthode numérique des caractéristiques, de caractère plus ou moins empirique, on la présente comme la première étape d'un schéma d'approximations successives dont on montre, sinon qu'il est convergent, du moins qu'il peut être construit jusqu'à tel stade que l'on voudra. La solution de la première étape telle qu'elle est présentée ici est complète. Du moins cette solution dépend-elle de l'application d'un procédé d'approximations successives, qui, lui, est convergent, et de la résolution d'une équation intégrale de VOLTERRA. Dans tout ceci il n'est pas question d'hypersonique; mais si l'on développe la méthode de choc détente dans le cadre de la théorie hypersonique des petites perturbations, on constate que le procédé d'approximations successives précédent n'est plus nécessaire, et que l'équation de VOLTERRA se résout en termes finis car son noyau est de rang 1. La solution obtenue est alors entièrement explicite et décrite par des formules relativement simples. La structure de la solution ressemble un peu à celle des écoulements supersoniques isentropiques, en ce que la solution en question présente un caractère universel dans un plan auxiliaire –le plan (β, S) : β angle du profil, S entropie – qui joue le rôle du plan de l'hodographe. La restitution du plan physique s'effectue par des formules explicites dans lesquelles intervient naturellement la courbure du profil. La forme de l'onde de choc de tête peut être obtenue; son comportement asymptotique est en accord avec celui qui est donné par la théorie linéaire modifiée de FRIEDRICHS, comme il se doit. Ces applications de la méthode de choc détente à la théorie hypersonique des petites perturbations font l'objet de la section 3 de ce chapitre II. C'est en raison de cette simplification substantielle, apportée par la théorie des petites perturbations, que le présent chapitre II a été placé sous le titre général mis en tête de cette publication. Dans la section 4 de ce même chapitre on expose l'extension, réalisée par EGGERS [8] et SAVIN [43], de la méthode de choc détente aux écoulements tridimensionnels, plus précisément aux écoulements sur des ogives de révolution sous faible incidence. Il n'a pas été possible, dans ce cas, de construire un schéma

d'approximations successives régulier permettant de justifier la méthode. Avec le chapitre III on retourne à la théorie des petites perturbations, mais en portant spécialement son attention sur les obstacles à nez émoussé. L'importance des effets d'émoussement en hypersonique a déjà été mis en évidence expérimentalement, notamment par HAMMITT et BOGDONOFF [24]. Les tentatives théoriques pour rendre compte de ces effets sont déjà anciennes, mais elles sont toutes indirectes, et partent, en général, d'une hypothèse *a priori*, à savoir que l'écoulement sur une plaque plane émoussée ou un cylindre mince –les génératrices rectilignes étant parallèles à l'écoulement général– est un écoulement isoénergétique par tranches transversales, l'énergie totale de chaque tranche étant reliée à la puissance développée par le courant gazeux pour vaincre la résistance de bord d'attaque. Dans le présent travail, on reprend le problème à la base en montrant que l'analogie énergétique précédente n'est pas valable. Il se développe au contact de l'obstacle une couche à très faible masse spécifique et entropie très élevée, c'est une couche relativement froide, par rapport aux températures très élevées qui règnent dans la région du bord d'attaque, dont l'évolution est réglée par la condition suivante : $p^{1/\gamma} . A = C^{te}$, où p désigne la pression, constante transversalement à la couche, et A l'aire de la section transversale de la couche en question* . On est ainsi conduit à reformuler le problème fondamental de la théorie hypersonique des petites perturbations. Quelques applications de ces principes sont traitées dans la section 3 de ce chapitre III; cela est très fragmentaire et une étude plus détaillée sera publiée ultérieurement. Le chapitre se termine par l'examen des écoulements tridimensionnels sur des ailes minces à bord d'attaque émoussé.

L'auteur tient tout spécialement à remercier M.P. GERMAIN pour de très nombreux conseils en période d'élaboration et de rédaction de ce travail, ainsi que pour avoir suggéré ce thème général de recherches.

La collaboration de M.P. DIRINGER a été très précieuse pour tout ce qui concerne les diverses applications, qu'il en soit remercié ici.

* K. CHENG nous a récemment signalé qu'il avait obtenu des résultats analogues dans une étude non encore publiée.

CHAPITRE I

LA THÉORIE HYPERSONIQUE DES PETITES PERTURBATIONS

I,1. INTRODUCTION

Relèvent de la théorie hypersonique des petites perturbations tous les écoulements hypersoniques caractérisés par une très grande valeur du nombre de Mach M_∞ de l'écoulement incident, pour lesquels le vecteur vitesse a, en tous les points, une direction voisine de celle d'un vecteur fixe. Tel est le cas, par exemple, pour l'écoulement sur une aile mince aplatie sur un plan, ou encore sur un obstacle de révolution élancé sous incidence faible. Toutefois une restriction s'impose : pour que la condition relative à la direction du vecteur vitesse soit vérifiée, il est nécessaire que la pente de l'obstacle soit partout très faible. Il en résulte la nécessité que le bord d'attaque de l'aile ou le nez de l'obstacle de révolution soient en forme d'arête ou de pointe parfaitement vives.

Lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée, il se peut que les conclusions de la théorie des petites perturbations soient complètement à réviser. La théorie linéaire supersonique ou subsonique connaît des difficultés de ce genre, mais elle parvient à s'en accommoder; en effet, la théorie linéaire donne une représentation de l'écoulement valable partout, sauf au voisinage immédiat des régions où les conditions relatives à la pente ne sont pas vérifiées . On sait même quelle est l'incidence de ces régions singulières sur les caractéristiques globales de l'écoulement.

La situation est toute différente en hypersonique, car l'existence d'un bord d'attaque ou d'une pointe émoussés peut modifier, notablement, l'écoulement, dans un domaine qui est de dimensions considérables par rapport au domaine où la condition géométrique de pente très faible est en défaut. Le chapitre III a précisément pour but de décrire et de chiffrer cet effet, il suffira donc ici d'avoir signalé son existence et de préciser que tout le chapitre I suppose vérifiée la condition relative à l'arête ou à la pointe. Il est également important de noter que les lois d'état du gaz sont supposées être celles d'un gaz parfait.

Les deux résultats les plus importants de la théorie hypersonique des petites perturbations sont d'une part le théorème de réduction de HAYES [25] connu sous le nom d'analogie du piston, d'autre part la notion de similitude hypersonique.

Le théorème de HAYES affirme que tout écoulement hypersonique, stationnaire ou non, sur une aile mince aplatie sur un plan, ou sur un obstacle fuselé élancé, est équivalent à un écoulement non stationnaire à une dimension de moins. L'étude de l'écoulement non stationnaire à une dimension étant connu sous le nom de problème du piston de RIEMANN, cela explique le nom d'analogie du piston donnée au théorème de HAYES. L'analogie en question est précisée sur la figure 1, dont la partie *a)* montre le problème d'écoulement hypersonique stationnaire plan, auquel correspond sur la partie *b)* un problème non stationnaire équivalent. Pour comprendre l'analogie, il faut se figurer que la fente FF de la figure 1 *a* est immobile, alors que les axes Oxy sont entraînés vers la gauche avec la vitesse U_∞ de l'obstacle, par rapport au milieu ambiant, milieu qui est caractérisé par l'indice ∞. La fente permet à un observateur d'examiner l'écoulement transversal, qui lui apparaît comme étant instationnaire. Soit

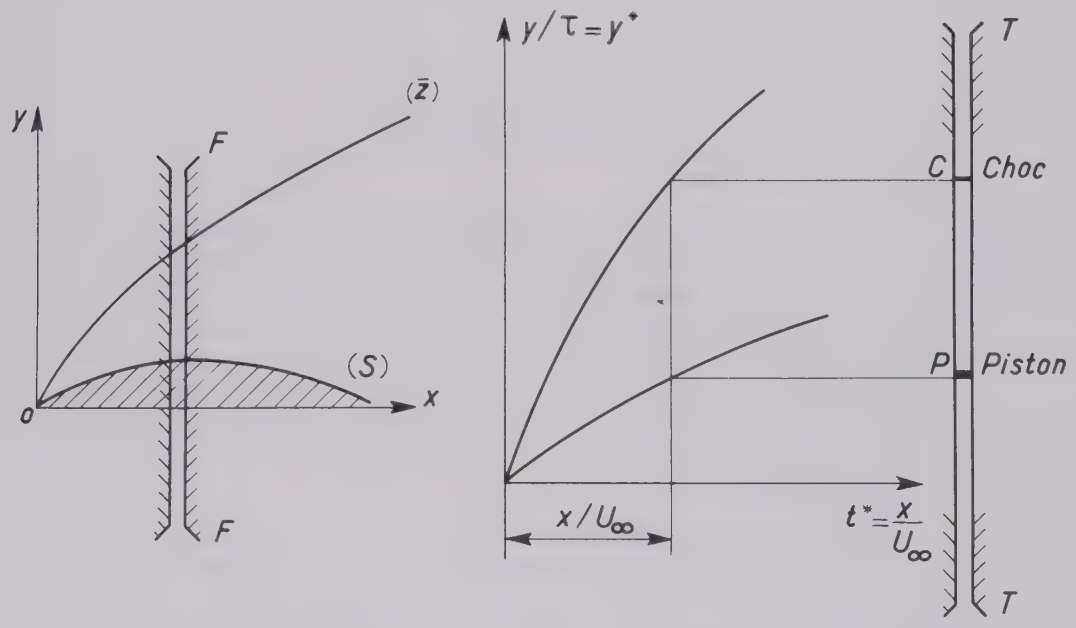
(1) $$y = \tau f(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0,$$

l'équation du profil, avec la condition de "petites perturbations"

(2) $$\tau \ll 1.$$

Lorsque le point d'abscisse x de l'obstacle arrive dans le plan de la fente, il s'est écoulé le temps :

(3) $$t = \frac{x}{U_\infty},$$



a) Ecoulement hypersonique *b) Problème du piston équivalent*

Fig.1 - Analogie du piston.

depuis le début de l'écoulement transversal lors du passage de la pointe au niveau de la fente. Il est clair que l'observateur regardant l'écoulement avec une loupe de grandissement $1/\tau$, ceci dans le but de voir les détails de l'écoulement, a l'impression que cet écoulement est produit par le déplacement du piston P dans le tube TT de la figure 1 *b*, piston dont la loi horaire du mouvement est :

(4) $$y/\tau = y^* = f^*(t) = f(U_\infty t).$$

L'image de cet écoulement transversal, tel qu'il est vu par l'observateur rivé sur la fente FF, est donnée précisément sur la figure 1 *b*. Il faut convenir que la figure 1 *b* ressemble à un diagramme (x, t), mais ceci est encore purement formel. Pour établir que cette analogie formelle entre l'écoulement de la figure 1 *b* et le problème de RIEMANN est en fait une identité, il faut établir un certain nombre de points.

En premier lieu il faut établir que l'observateur est dans l'impossibilité d'être informé de ce qui se passe en dehors de son plan d'observation FF; et ceci est précisément la propriété de réduction. Or ce premier point est une conséquence du fait que l'écoulement est hypersonique. En effet, les seules informations que peut avoir l'observateur, proviennent d'un phénomène de propagation par ondes dont les fronts d'onde se déplacent à la célérité du son par rapport au fluide en mouvement. Mais, puisque la célérité du son est très faible devant U_∞, ces fronts d'onde se propagent, par rapport aux axes entraînés avec l'obstacle, avec une vitesse qui est très approximativement U_∞ dans la direction Ox; il en résulte que les fronts d'onde en question suivent l'obstacle dans son mouvement sans réussir à quitter le plan $x = \text{Cte}$ où ils ont pris naissance. Ainsi l'observateur FF n'est-il jamais informé que de ce qui se passe et s'est passé dans sa propre tranche, ce qui établit l'aspect réduction du théorème de HAYES.

La réduction étant acquise, il faut, en second lieu, vérifier l'identité entre les équations et conditions aux limites du problème réduit, et les équations et conditions aux limites d'un problème de RIEMANN. Laissons de côté, pour l'instant la question des conditions aux limites; les équations des deux problèmes sont complètement hyperboliques, il en résulte que pour vérifier l'identité des deux systèmes d'équations il suffit de vérifier l'identité des directions caractéristiques et des conditions de compatibilité. En ce qui concerne la direction caractéristique intermédiaire et les conditions de compatibilité correspondantes, la question est triviale, puisque, aux lignes de courant du problème initial correspondent, dans le problème réduit, des lignes qui sont des trajectoires pour le problème de RIEMANN associé. En ce qui concerne les autres directions caractéristiques, la question a déjà été réglée par la discussion sur la propagation des fronts d'onde. Soient, en effet, v la vitesse transversale de l'écoulement initial, et a la célérité du son dans cet écoulement, les fronts d'onde se propagent, dans toutes les directions, dans le plan de la fente avec la vitesse a par rapport à l'écoulement, c'est-à-dire avec la vitesse $v\vec{y} + a\vec{u}\,(\vec{u}^2 = 1)$; pour le problème réduit de la figure 1 b cela correspond à une vitesse de propagation qui est :

$$\frac{v\vec{y} + a\vec{u}}{\tau} = v^*\vec{y}^* + a^*\cdot\vec{u} \tag{5}$$

et, puisque $v^*\ \vec{y}^*$ est la vitesse des particules du problème de RIEMANN, la direction (5) est celle des caractéristiques du problème de RIEMANN pourvu que a^* en soit la célérité du son. Soient alors p et ρ la pression et la masse spécifique dans l'écoulement initial, la condition précédente est vérifiée en adoptant pour pression et masse spécifique dans le problème de RIEMANN associé les valeurs

$$\rho^* = \rho\,, \qquad p^* = p/\tau^2, \tag{6}$$

avec naturellement dans la partie du tube TT qui est encore au repos

$$\rho_o^* = \rho_\infty\,, \qquad p_o^* = p_\infty/\tau^2. \tag{7}$$

Jusqu'à maintenant il n'a pas été tiré avantage du fait que l'écoulement initial était plan, sur (5) cela se traduirait par le remplacement de $\vec{u}$ par $\pm\vec{y}^*$; par contre, la question des conditions de compatibilité qui va être examinée maintenant, suppose essentiellement l'écoulement initial plan. L'extension à trois dimensions doit être possible, mais probablement pas sans calculs, ce qui fait perdre beaucoup d'intérêt à la méthode suivie.

Soit θ l'inclinaison des lignes de courant (*fig. 1 a*), et q la valeur du module du vecteur vitesse, les conditions de compatibilité du problème initial sont bien connues, pour leur démonstration voir chapitre II section 2 :

$$dp = \pm\,\rho\, q^2\, \mathrm{tg}\,\mu\, d\theta\,, \tag{8}$$

où $\mu = \mathrm{Arc\,sin}(1/M)$ désigne l'angle de Mach local. Mais, en théorie hypersonique des petites perturbations, l'on a :

$$\begin{aligned} q &= U_\infty\,[1 + O(\tau^2)]^{(*)}\,, \\ q\ \mathrm{tg}\ \mu &= a\left[1 + O\left(\frac{1}{M_\infty^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

(*) La notation $O(\tau^2)$ a la signification : $\lim_{\tau \to O} \dfrac{O(\tau^2)}{\tau^2}$ fini et non nul.

enfin, si l'on note que

$$\theta = \frac{v}{U_\infty}[1 + O(\tau^2)], \tag{10}$$

l'on voit que les conditions de compatibilité (8) s'écrivent, grâce à (6)

$$dp^* = \pm \rho^* a^* \cdot dv^* \left[1 + O\left(\tau^2 + \frac{1}{M_\infty^2}\right)\right], \tag{11}$$

et telles sont bien, si l'on néglige le terme $O(\tau 2 + 1/M_\infty^2)$, les conditions de compatibilité d'un problème de RIEMANN (*).

Il reste seulement la question des conditions aux limites. Sur l'obstacle la chose est claire : l'image de l'obstacle dans le problème réduit fournit la loi horaire du mouvement du piston dans le problème de RIEMANN associé. Examinons les conditions sur l'onde de choc. Soient

$$\begin{cases} y = \tau g(x), \\ y^* = g^*(t) = g(U_\infty t), \end{cases} \tag{12}$$

les ondes de choc des deux problèmes. Il est bien connu que les lois de l'onde de choc des deux problèmes ont la même forme à condition de les exprimer respectivement à l'aide du nombre de Mach normal :

$$M_n = M_\infty \frac{\tau g'(x)}{\sqrt{1 + \tau^2 g'^2(x)}}, \tag{13}$$

et du nombre de Mach de l'onde de choc :

$$M_c = \frac{g^{*\prime}(t)}{a_0^*} = \tau \frac{U_\infty}{a_\infty} g'(x) = M_n[1 + O(\tau^2)], \tag{14}$$

et cela achève la démonstration du théorème de HAYES.

Maintenant, il est indiqué de remarquer que, dans le problème de RIEMANN associé, le nombre de Mach figure seulement dans les conditions sur l'onde de choc, par l'intermédiaire de M_n, c'est-à-dire du produit $M_\infty \tau$. Cette simple remarque suffit à établir la notion de similitude hypersonique que l'on peut énoncer comme suit : dans la formule (1) donnant la forme de l'obstacle, la fonction $f(x)$ est fixée, τ étant variable, de manière à obtenir une famille à un paramètre d'obstacles affins; dans ces conditions, *deux écoulements qui diffèrent par les valeurs de* τ *et* M_∞, *mais pour lesquels le paramètre de similitude hypersonique*

$$k = M_\infty \tau, \qquad (\tau \ll 1,\ M_\infty \gg 1) \tag{15}$$

est le même, deux tels écoulements sont identiques. Plus exactement, ces deux écoulements se déduisent l'un de l'autre par la même affinité que les obstacles correspondants.

Cette règle de similitude est bien illustrée par le cas de l'écoulement sur un dièdre (*fig.2*), dont l'angle d'ouverture θ est très faible, qui est placé dans un écoulement hypersonique de nombre de Mach M_∞ très grand. LINNEL a montré le premier que, γ étant le rapport des chaleurs spécifiques, la pression sur le dièdre est donnée par la formule :

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}(M_\infty \theta)^2 + \gamma M_\infty \theta \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta\right)^2 + 1}, \tag{16}$$

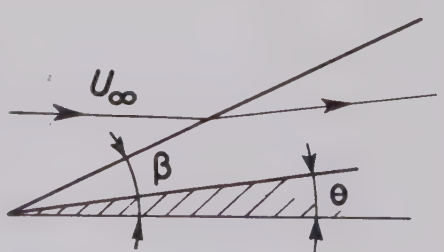


Fig. 2 - Le dièdre

alors que l'angle d'inclinaison β de l'onde de choc attachée est donné par :

$$M_\infty \beta = \frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta\right)^2 + 1}. \tag{17}$$

Sur les formules (16) et (17) la règle de similitude énoncée plus haut est en évidence; on pourra noter sur la formule (16) que le produit $M_\infty \theta$ pouvant avoir n'importe quelle valeur, la

(*) On peut déjà se rendre compte que la validité de la théorie hypersonique des petites perturbations exige que soient réalisées les deux conditions simultanées $\tau \ll 1$, $M_\infty \gg 1$.

pression est en général fortement perturbée par la présence de l'obstacle. De là la nécessité de donner au terme "petites perturbations" le sens très précis qui lui a été donné au début de ce paragraphe.

Il est intéressant d'achever l'étude de ce cas simple du dièdre. La masse spécifique sur ce dernier est déduite de la formule :

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \beta^2}. \tag{18}$$

Il est clair que θ s'identifie ici avec le paramètre τ de la formule (1) d'où l'on déduit, en notant v la vitesse transversale, les estimations suivantes :

$$\frac{p}{p_\infty} = O(M_\infty^2 \tau^2 + 1), \frac{\rho_\infty}{\rho} = O(1), \quad \frac{v}{U_\infty} = O(\tau), \quad \beta = O\left(\tau + \frac{1}{M_\infty}\right), \tag{19}$$

d'où résulte

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = \frac{p}{p_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho} = O(M_\infty^2 \tau^2 + 1), \quad \frac{M}{M_\infty} = O\left(\frac{1}{M_\infty \tau + 1}\right), \tag{20}$$

et enfin, accessoirement, u désignant la composante longitudinale de la vitesse, l'on a

$$\frac{u - U_\infty}{U_\infty} = O\left(\tau^2 + \frac{1}{M_\infty^2}\right). \tag{21}$$

Il sera très utile d'avoir en permanence présentes à l'esprit les diverses estimations précédentes, qui sont encore valables si l'obstacle n'est pas un dièdre.

La démonstration précédemment donnée du théorème de HAYES est intéressante, parce qu'elle met bien en évidence le phénomène physique qui est à l'origine des propriétés énoncées dans ce théorème; mais la démonstration en question ne met pas suffisamment en lumière toute la généralité du résultat de HAYES, aussi la question va-t-elle être reprise d'un autre point de vue.

Les obstacles considérés dans ce qui suit sont soit en forme d'aile aplatie sur le plan xOy, soit en forme de corps fuselé élancé dans la direction de l'axe Ox. Un tel obstacle est supposé animé d'un mouvement, non nécessairement uniforme, de vitesse $U_\infty(t)$, dans un milieu au repos dont la célérité du son $a_\infty = U_\infty(t)/M_\infty(t)$, est constante. L'obstacle est également supposé déformable au cours du temps. Dans le premier cas en désignant par c la corde de l'obstacle, ce dernier est défini par une équation de la forme :

$$z = \tau c f\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}, t\right) \tag{22}$$

et dans le second cas par une équation de la forme :

$$\begin{cases} r = \tau c f(\frac{x}{c}, \phi, t), \\ y = r \cos \phi, \\ z = r \sin \phi. \end{cases} \tag{23}$$

Les figures sont faites en supposant que l'obstacle est un profil d'aile, mais cela n'enlève rien à la généralité du raisonnement. Les axes $Oxzy$ sont liés à l'obstacle, tandis que les axes $OXZY$ sont immobiles dans l'air au repos. L'écoulement est alors considéré comme un phénomène sonore non linéaire dans l'espace à quatre dimensions $XYZT$. La figure 3 explique le changement d'axes de coordonnées. L'on a

$$\begin{cases} x = X + L(T), & a) \\ y = Y, & b) \\ z = Z, & c) \\ t = T, & d) \end{cases} \tag{24}$$

avec

$$L(T) = \int_0^T U_\infty(t)\, dt. \tag{25}$$

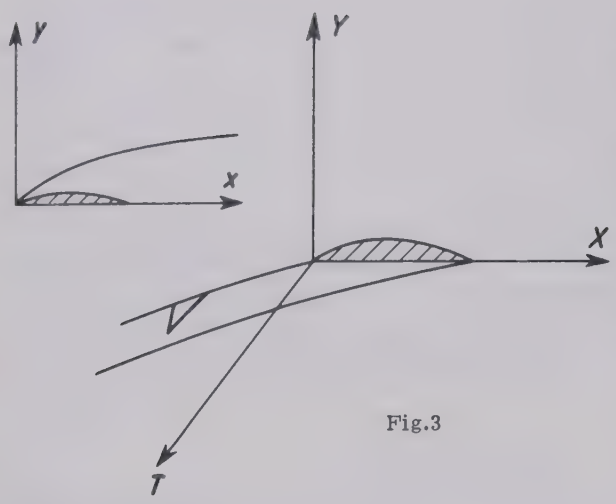


Fig.3

L'inversion de la formule (24 *a*) donne :

(26) $$T = \Theta(x - X).$$

Dans le cadre spatio-temporel qui est celui de l'espace X, Y, Z, T l'écoulement apparaît comme un phénomène de propagation par ondes, engendré par un système d'ébranlements qui sont émis par la surface :

(27) $$z = \tau c f\left(\frac{X + L(T)}{c}, \frac{Y}{c}, T\right), \quad (S)$$

dans le premier cas, et par la surface

(28) $$\begin{cases} R = \tau c f\left(\frac{X + L(T)}{c}, \phi, T\right), \\ Y = R\cos\phi, \\ Z = R\sin\phi, \end{cases} \quad (S)$$

dans le second cas.

D'après les connaissances acquises sur le type d'équations régissant le phénomène en question, l'état du gaz au point $\mathcal{M}(X, Y, Z, T)$ dépend uniquement du système d'ébranlements émis par les points de la surface (S) situés à l'intérieur du conoïde caractéristique rétrograde $(\Gamma_{\mathcal{M}})$ de sommet $\mathcal{M}$. Les points en question sont situés sur une portion de surface $(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$ à trois dimensions, comme il est expliqué sur la figure 4.

Le théorème de HAYES, sous sa forme la plus générale, affirme que dans le diagramme spatio temporel X, Y, Z, T, la variable X joue simplement le rôle d'un paramètre. Tout se passe, localement, pour chaque valeur de X_0, comme si l'écoulement dans la section $X = X_0$ était le même que si la surface (S) était confondue avec le cylindre $K(X_0)$ de génératrices parallèles à OX et dont la trace sur $X = X_0$ est définie par :

(29) $$Z = \tau c f\left(\frac{X_0 + L(T)}{c}, \frac{Y}{c}, T\right),$$

dans le premier cas, et

(30) $$R = \tau c f\left(\frac{X_0 + L(T)}{c}, \phi, T\right),$$

dans le second cas.

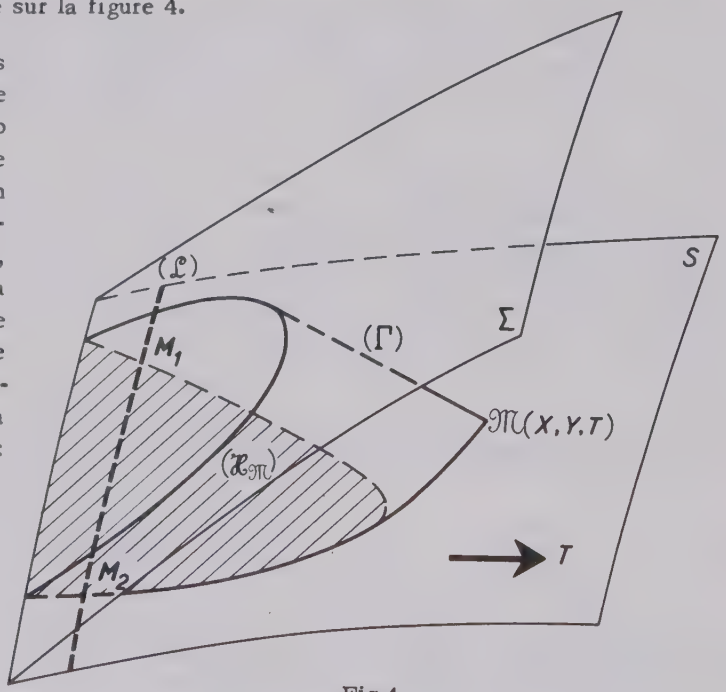


Fig.4

La surface (S) est une surface pseudo-cylindrique, engendrée par des lignes $(\mathcal{L})$ s'appuyant sur (29). Une ligne $(\mathcal{L})$ est définie par la représentation paramétrique suivante à l'aide de X :

(31) $$\begin{cases} T = \Theta(x - X), \\ R = \tau c f[\frac{x}{c}, \phi, \Theta(x - X)]. \end{cases} \quad (\mathcal{L})$$

Pour établir le théorème de HAYES, il suffit donc de montrer que la génération de (S) par les lignes $(\mathcal{L})$, est presque celle d'un cylindre parallèle à l'axe OX, ceci dans un voisinage convenable de toute valeur X_0 de X. Le terme voisinage convenable peut être précisé comme suit : quel que soit le point $\mathcal{M}$ de la figure 4 situé dans $X = X_0$, le segment M_1M_2 de toute ligne

$(\mathcal{L})$ tracée sur la surface (S), segment dont les extrémités sont situées sur $(\Gamma_{\mathcal{M}})$, doit pouvoir être considéré comme un segment de droite parallèle à OX. L'approximation qui consiste à supposer que (S) est quasi-cylindrique, localement, comporte donc les hypothèses suivantes. En premier lieu, la pente de la ligne $(\mathcal{L})$ sur l'axe OX doit être très faible par rapport à la pente des rayons de propagation. En second lieu, la variation de toute grandeur entre les points M_1 et M_2 doit être très faible en valeur relative. Une restriction doit pourtant être formulée : il est nécessaire que, pour le deuxième type de conditions, il soit indifférent de substituer à $(\mathcal{L})$ une ligne dont la projection sur XOT soit une parallèle à OX. Nous reviendrons sur ce point.

La première condition est immédiatement vérifiée comme conséquence du fait que l'écoulement est hypersonique et peu perturbé, en effet, si a désigne la célérité du son locale, le rapport entre la pente de $(\mathcal{L})$ et celle des rayons de propagation est :

$$\frac{a}{U_\infty} = \frac{a}{a_\infty}\frac{1}{M_\infty} = O\left(\frac{1}{M_\infty} + \tau\right). \tag{32}$$

Pour examiner la seconde série de conditions il suffit de se placer dans le cas où le domaine $(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$ est le plus ouvert, c'est-à-dire en plaçant le point $\mathcal{M}$ en M sur le bord de fuite de l'obstacle; le domaine $(\mathcal{K}_{\mathcal{M}})$ est alors l'intérieur du triangle curviligne MM_1M_2 de la figure 5. On se borne ici à considérer le cas des obstacles fuselés, les conditions à vérifier sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{T_{M_2} - T_{M_1}}{T_M - T_{M_1}} \ll 1, & (a) \\[2ex] \dfrac{|R_{M_2} - R_{M_1}|}{R_{M_1}} \ll 1, & (b) \\[2ex] \dfrac{\left|\left(\dfrac{dR}{dX}\right)_{M_2} - \left(\dfrac{dR}{dX}\right)_{M_1}\right|}{\left|\left(\dfrac{dR}{dX}\right)_{M_1}\right|} \ll 1, & (c) \\[2ex] \dfrac{\left|\left(\dfrac{dT}{dX}\right)_{M_2} - \left(\dfrac{dT}{dX}\right)_{M_1}\right|}{\left|\left(\dfrac{dT}{dX}\right)_{M_1}\right|} \ll 1. & (d) \end{array}\right. \tag{33}$$

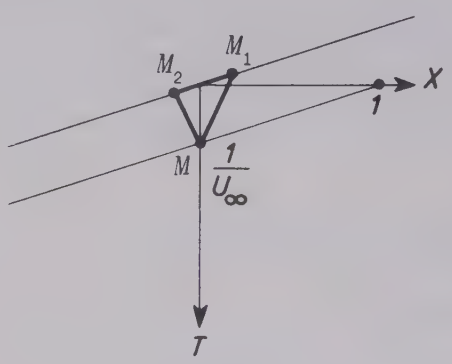


Fig.5

Pour estimer le rapport $\dfrac{T_{M_2} - T_M}{T_M - T_{M_1}}$, il est clair qu'il suffit d'utiliser le schéma linéarisé de la figure 5, à condition d'adopter pour célérité du son, la célérité du son a de l'écoulement perturbé. Un calcul simple donne alors :

$$\frac{T_2 - T_1}{T - T_1} \sim \frac{2M_\infty \dfrac{a_\infty}{a}}{M_\infty^2\left(\dfrac{a_\infty}{a}\right)^2 - 1} = O\left(\tau + \frac{1}{M_\infty}\right). \tag{34}$$

Le même schéma linéarisé permet également d'obtenir;

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} \sim \frac{\left|\dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|}{f}\,\frac{M_\infty \dfrac{a_\infty}{a}}{M_\infty^2\left(\dfrac{a_\infty}{a}\right)^2 - 1}. \tag{35}$$

En ce qui concerne le premier membre de (33 c), l'on voit aisément qu'il est donné par une expression analogue au second membre de (35), à condition de remplacer

$$\frac{\dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial f}{\partial t}}{f} \text{ par } \frac{c}{U_\infty}\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}.$$

Il en résulte que (33 *b*) et (33 *c*) ne sont pas des conditions essentiellement différentes. Il est clair enfin que (33 *d*) fait intervenir l'accélération $ng - g$ = accélération de la pesanteur – du mouvement d'ensemble de l'obstacle, et le même calcul qui conduit à (34) permet d'obtenir :

$$\frac{\left(\frac{dT}{dX}\right)_2 - \left(\frac{dT}{dX}\right)_1}{\left(\frac{dT}{dX}\right)_1} \sim \frac{ncg}{U_\infty^2} \frac{M_\infty \frac{a_\infty}{a}}{M_\infty^2 \left(\frac{a_\infty}{a}\right)^2 - 1}. \tag{36}$$

En adoptant les conditions extrêmes avec $n = 100$, $U_\infty = 5\,\text{km/s}$, $c = 10\,\text{m}$, l'on trouve $ncg/U_\infty^2 = 4\,10^{-4}$, de sorte que (33 *d*) est toujours vérifiée comme conséquence de (33 *a*). Ainsi, pour un obstacle déformable ou non, dont le mouvement est assorti ou non d'accélérations qui peuvent être aussi importantes que 100 g, le théorème de HAYES est valable sous les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \tau + \dfrac{1}{M_\infty} \ll 1, & (a) \\ \dfrac{\dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial f}{\partial t}}{f}\left(\tau + \dfrac{1}{M_\infty}\right) \ll 1, & (b) \end{cases} \tag{37}$$

Pour les écoulements stationnaires $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ de sorte que, dans ce cas (37 *b*) est une conséquence de (37 *a*) qui alors, se trouve être la seule condition de validité du théorème de HAYES. Il en sera de même pour les écoulements quasi-stationnaires, par exemple à propos des études de stabilité dynamique, et même pour les phénomènes de flottement si la fréquence réduite est modérée. La condition (37 *b*) pourra intervenir si l'obstacle exécute des oscillations de déformation à très haute fréquence. Ainsi, supposons que l'obstacle soit défini par :

$$r = \tau c\left[f_0\left(\frac{x}{c}\right) + \varepsilon e^{i\omega t} f_1\left(\frac{x}{c}\right)\right], \tag{38}$$

avec $f_1/f_0 = O(1)$. La condition (37 *b*) est évidemment vérifiée quel que soit ω si ε est suffisamment petit. Toutefois, d'après ce qui a été vu précédemment il faut aussi que soit vérifiée la condition correspondante avec $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} / \frac{\partial f}{\partial t}$ à la place de $\frac{\partial f}{\partial t} / f$, et cela montre que le théorème de HAYES est encore vrai pour les oscillations de déformation si la fréquence réduite

$$\omega_r = \frac{c\omega}{U_\infty}, \tag{39}$$

vérifie la condition :

$$\omega_r\left(\tau + \frac{1}{M_\infty}\right) \ll 1 \qquad (a). \tag{40}$$

En vertu de la remarque faite plus haut, la condition (40 *a*) peut ne pas être suffisante pour assurer (37 *b*) si la longueur d'onde des oscillations de déformation est très faible devant la corde de l'obstacle. La longueur d'onde λ étant définie par $\frac{c}{f}\frac{\partial f}{\partial x} = O\left(\frac{c}{\lambda}\right)$, il faut alors substituer à (40 *a*) la condition :

$$\left(\omega_r + \frac{c}{\lambda}\right)\left(\tau + \frac{1}{M_\infty}\right) \ll 1 \qquad (b). \tag{40}$$

Il est à noter que les conditions (40) ne sont pas très sévères, elles n'interviendront que très rarement pour limiter l'applicabilité du théorème de HAYES aux problèmes de flottement.

Il est maintenant possible de formuler le problème aux limites fondamental de la théorie hypersonique des petites perturbations en distinguant les deux types d'obstacles : ailes minces et corps fuselés. Il est clair pour commencer que ce problème aux limites ne se laisse formuler d'une manière simple et générale que dans l'espace à 4 dimensions X, Y, Z, T. La première opération à effectuer consiste donc à effectuer le changement de variables (24). Ceci

étant, au vecteur vitesse du fluide :

$$\vec{V} = (U_\infty + u)\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}, \tag{41}$$

dans l'espace x, y, z correspond le vecteur vitesse d'une particule de gaz :

$$\vec{W} = V\vec{Y} + W\vec{Z} \tag{42}$$

dans le diagramme X, Y, Z, T. Les équations du mouvement sont naturellement les équations générales du mouvement d'un fluide parfait dans un écoulement parallèle à OYZ. Ainsi les équations en question sont-elles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial T} + \dfrac{\partial \rho V}{\partial Y} + \dfrac{\partial \rho W}{\partial Z} = O, \\ \dfrac{\partial V}{\partial T} + V\dfrac{\partial V}{\partial Y} + W\dfrac{\partial V}{\partial Z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial Y} = O, \\ \dfrac{\partial W}{\partial T} + V\dfrac{\partial W}{\partial Y} + W\dfrac{\partial W}{\partial Z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial Z} = O, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial T} + V\dfrac{\partial}{\partial Y} + W\dfrac{\partial}{\partial Z}\right)(p/\rho^{-\gamma}) = O. \end{cases} \tag{43}$$

Aux équations précédentes il convient d'associer des conditions aux limites sur deux frontières, dont l'une est connue alors que l'autre est inconnue a priori. La frontière connue est constituée par la courbe $[\Gamma(T, X_0)]$ de l'espace Y, Z représentant un piston cylindrique $\mathcal{P}(T, X_0)$ (*fig.6* et *7*) qui se déforme avec le temps. Dans la définition $[\mathcal{P}(T, X_0)]$, X_0 joue seulement le rôle d'un paramètre.

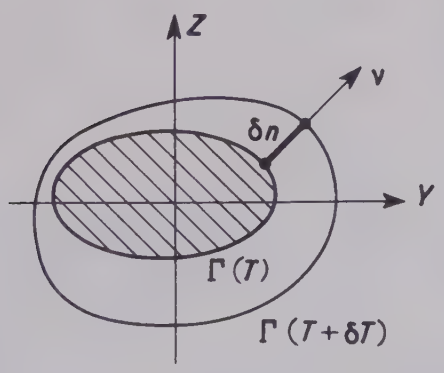


Fig.6 - Piston bidimensionnel équivalent d'un écoulement tridimensionnel

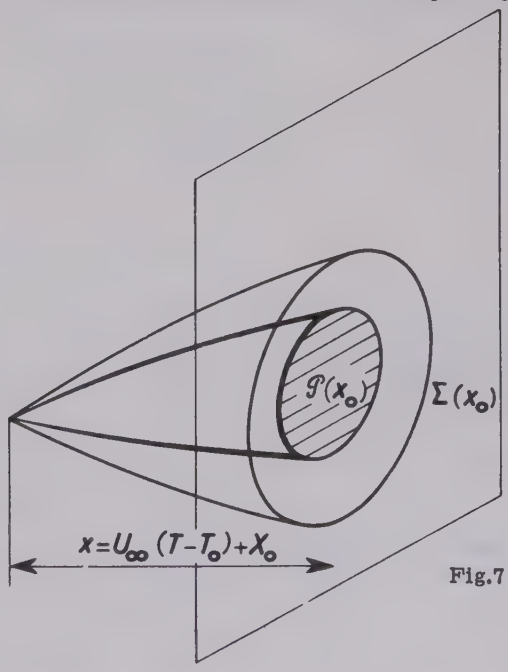


Fig.7

Soit T_0 défini par $X_0 + L(T_0) = O$, la loi du mouvement du piston $[\mathcal{P}(T, X_0)]$ est donnée par

$$R = \tau c f\left(\frac{U_\infty(T_0)(T-T_0)}{c}, \phi, T\right), \tag{44}$$

dans le cas d'un obstacle fuselé, et par

$$Z = \tau c f\left(\frac{U_\infty(T_0)(T-T_0)}{c}, \frac{Y}{c}, T\right), \tag{45}$$

dans le cas d'une aile. Il est clair que la vitesse du gaz au contact du piston est donnée, dans l'un et l'autre cas, par les formules :

$$(46)\quad \begin{cases} \vec{W} = \tau U_\infty \left(c\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial f}{\partial t} \right) \left\{ \vec{Z} - \tau c \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{Y} \right\}, & a) \\ \vec{W} = \tau U_\infty \left(c\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial f}{\partial t} \right) \left\{ \dfrac{f(f_\phi \sin\phi + f\cos\phi)}{f^2+f_\phi^2}\vec{Y} + \dfrac{f(-f_\phi\cos\phi + f\sin\phi)}{f^2+f_\phi^2}\vec{Z} \right\}. & b) \end{cases}$$

Dans l'un et l'autre cas le piston chasse devant lui une onde de choc dont la loi du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$(47)\quad \begin{cases} Z = \tau c\, G\left(\dfrac{Y}{c},\ T,\ T_0\right), & a) \\ R = \tau c\, G(\phi, T, T_0). & b) \end{cases} \qquad \left(\Sigma(T, X_0)\right)$$

Dans les formules précédentes, T_0 joue le rôle d'un simple paramètre, lié d'ailleurs à X_0 par $X_0 + L(T_0) = O$. Soit v_n la vitesse normale de déplacement de l'onde de choc $(\Sigma(X_0))$:

$$(48)\quad \begin{cases} v_n = \tau c \dfrac{G_\tau\, G}{\sqrt{G^2+G_\phi^2}}, & a)\ \textit{(obstacle fuselé)} \\ v_n = \tau c\, G_\tau\,[1+O(\tau^2)], & b)\ \textit{(aile)}, \end{cases}$$

les conditions de RANKINE-HUGONIOT fournissent sur $(\Sigma(X_0))$ les conditions aux limites suivantes –l'indice σ précise qu'il s'agit de quantités évaluées sur $\Sigma-$:

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{p\sigma}{p_\infty} = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\dfrac{v_n}{a_\infty}\right)^2 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}, & a) \\ \dfrac{\rho_\infty}{\rho_\sigma} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1} + \dfrac{2}{\gamma+1}\left(\dfrac{a_\infty}{v_n}\right)^2, & b) \\ \vec{W}_\sigma = \dfrac{2}{\gamma+1} v_n \left[1-\left(\dfrac{a_\infty}{v_n}\right)^2\right]\left\{\vec{z} - \tau c \dfrac{\partial G}{\partial Y}\vec{Y}\right\}. & c) \end{cases}$$

La formule (49 *c*) est relative au cas d'une aile mince; pour un obstacle fuselé il suffit de modifier le { } comme il est indiqué dans les formules (46). En effectuant la transformation (24) en sens inverse, il est clair qu'il est possible d'obtenir l'onde de choc attachée à l'obstacle (27) (28) sous la forme :

$$(50)\quad \begin{cases} z = \tau c\, g\left(\dfrac{x}{c}, \dfrac{\gamma}{c}, t\right), \\ r = \tau c\, g\left(\dfrac{x}{c}, \phi, t\right), \end{cases}$$

la fonction g se déduisant de G par exemple par

$$(51)\quad g\left(\frac{x}{c}, \phi, t\right) = G\left[\phi, t, \Theta\left(\frac{x-L(T)}{c}\right)\right].$$

En utilisant (50) et (51) dans (48) et (49) il vient, dans le cas d'une aile

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{p_\sigma}{p_\infty} = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \tau^2 \left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}, \\ \dfrac{\rho_\infty}{\rho_\sigma} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1} + \dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1}{M_\infty^2\tau^2}\left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^{-2}, \\ \dfrac{\vec{W}_\sigma}{U_\infty} = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)\left\{1 - \dfrac{1}{M_\infty^2\tau^2}\left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^{-2}\right\}\left\{\vec{z} - \tau c\dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{y}\right\}. \end{cases}$$

Pour un obstacle fuselé les conditions (52) doivent être remplacées par :

$$
(53)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{p_\sigma}{p_\infty} = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \tau^2 \left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t} \right)^2 \dfrac{g^2}{g^2+g_\phi^2} - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}, \\[2ex]
\dfrac{\rho_\infty}{\rho} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1} + \dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1}{M_\infty^2\tau^2}\left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t} \right)^{-2} \dfrac{g^2+g_\phi^2}{g^2} \\[2ex]
\dfrac{\vec{W}_\sigma}{U_\infty} = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t} \right) \left[1 - \dfrac{(g^2+g_\phi^2)/g^2}{M_\infty^2\tau^2\left(c\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{c}{U_\infty}\dfrac{\partial g}{\partial t} \right)^2} \right] \cdot \\[2ex]
\qquad \cdot \left\{ \dfrac{g(g_\phi \sin\phi + g\cos\phi)}{g^2+g_\phi^2}\vec{y} + \dfrac{g(-g_\phi\cos\phi + g\sin\phi)}{g^2+g_\phi^2}\vec{z} \right\}
\end{cases}
$$

Les conditions aux limites (46) (52) (53) qui ont été obtenues par l'intermédiaire du diagramme spatio-temporel $XYZT$ sont formulées en axes $xyzt$; seules les équations aux dérivées partielles (31) restent formulées dans le diagramme spatio-temporel. Mais le passage aux variables $xyzt$ est trivial grâce à (24) si l'on se souvient que X joue le rôle d'un paramètre et doit donc, dans (43), être considéré comme constant. Il vient de cette manière :

$$
(54)\qquad
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + U_\infty \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\rho + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} + \dfrac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + U_\infty \dfrac{\partial}{\partial x}\right) v + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + U_\infty \dfrac{\partial}{\partial x}\right) w + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + U_\infty \dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}\right)(p\rho^{-\gamma}) = 0.
\end{cases}
$$

Ainsi, pour obtenir les équations aux dérivées partielles des écoulements hypersoniques, en théorie des petites perturbations, il suffit de remplacer la composante longitudinale du vecteur vitesse par la valeur U_∞ de la vitesse dans l'écoulement incident, et de supprimer l'équation relative à cette composante longitudinale. Il est évident que, par ce procédé, les équations (54) sont immédiatement obtenues à partir des équations complètes de la dynamique des gaz idéaux. Assorties des conditions de CAUCHY (52) ou (53) sur la frontière mobile (50) et de la condition de non pénétration (46) sur la frontière de l'obstacle qui est fixe, ces équations aux dérivées partielles conduisent à un problème aux limites hautement non linéaire. Il est hors de doute que, si l'obstacle est convexe et suffisamment régulier, le problème aux limites précédent admet une solution unique, au moins dans un certain domaine, mais ce n'est là qu'une conjecture et nous ne possédons aucun théorème d'existence ou d'unicité. Dans la section 2 de ce chapitre on verra mieux quelle est la nature du problème aux limites en question, et, par voie de conséquence, les raisons pour lesquelles ce problème est convenablement posé. Dans le chapitre II on indiquera un procédé d'approximations successives qui devrait permettre de construire la solution cherchée. Il paraît probable que le procédé en question, qui est présenté ici de façon purement formelle, est en fait convergent, mais la démonstration de cette convergence que nous ne sommes pas en mesure de donner se heurte sans doute à de très grandes difficultés techniques. D'ailleurs la méthode de construction est bien trop spéciale et artificielle pour qu'il soit justifié de s'attacher à obtenir une telle démonstration.

Il est bien plus intéressant de signaler l'intervention d'une substantielle simplification dans le cas des ailes. En se reportant aux conditions aux limites (46) et (52) le lecteur notera que sur l'obstacle et sur l'onde de choc l'on a :

$$V = WO(\tau);$$

il en résulte que, dans ce cas des ailes, l'écoulement s'effectue parallèlement au plan Oxz, par "tranches longitudinales". Pour étudier un écoulement hypersonique stationnaire sur l'aile mince de la figure 8, on peut se borner à couper l'aile par des plans $y = y_0$, et étudier, comme fonction du paramètre y_0, l'écoulement hypersonique stationnaire plan sur chacun des profils, sections de l'aile par les plans précédents. D'ailleurs, la même propriété est vraie si l'écoulement est non stationnaire. Dans chaque tranche les équations aux dérivées partielles du mouvement sont :

$$(55)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x}\right)\rho + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x}\right) w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}\right)(p\rho^{-\gamma}) = 0. \end{cases}$$

Les conditions aux limites associées sont naturellement :

$$(56)\qquad w = \tau U_\infty \left(c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{c}{U_\infty}\frac{\partial f}{\partial t}\right), \quad \left(\text{sur l'obstacle } z = \tau c f\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}, t\right)\right)$$

et

$$(57)\qquad \begin{cases} \frac{p_\sigma}{p_\infty} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \tau^2 \left(c\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{c}{U_\infty}\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \\ \frac{\rho_\infty}{\rho_\sigma} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M_\infty^2\tau^2}\left(c\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{c}{U_\infty}\frac{\partial g}{\partial t}\right)^{-2}, \left(\text{sur l'onde de choc } z = \tau c g\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}, t\right)\right) \\ \frac{W_\sigma}{U_\infty} = \frac{2}{\gamma+1}\left(c\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{c}{U_\infty}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\left\{1 - \frac{1}{M_\infty^2\tau^2}\left(c\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{c}{U_\infty}\frac{\partial g}{\partial t}\right)^{-2}\right\}. \end{cases}$$

Dans ce nouveau problème aux limites, y intervient seulement comme un paramètre.

Au sujet de cette technique de "tranches", que les aérodynamiciens connaissent bien, puisqu'elle intervient dans de nombreuses questions, il y a quelques remarques à formuler. En premier lieu pour que la méthode soit valable il faut prendre quelques précautions. Ainsi, si l'aile de la figure 8 présentait en 0 une pointe la méthode ne serait pas valable à l'intérieur du conoïde caractéristique issu de 0. Il en est de même chaque fois qu'intervient une discontinuité de pente transversalement à l'écoulement général, ou qu'il y a une cassure en un point de l'arête. Naturellement il s'agit d'une arête parfaitement vive. Si l'arête est émoussée il faut avoir recours aux techniques du chapitre III spécialement la section 4 de ce chapitre, et la notion de tranches longitudinales est à réviser. En second lieu on peut remarquer que, le fait que y n'intervienne que comme un paramètre, n'a rien de mystérieux. En effet (*fig.8*) l'état de l'écoulement au point M de l'aile ne dépend des données sur cette dernière que dans la zone AMB qui est hachurée sur la figure 8; le conoïde caractéristique rétrograde de sommet M étant très délié, la portion de l'aile ainsi découpée peut être considérée comme une portion de cylindre de génératrices parallèles à Oy. Enfin, le lecteur notera une certaine analogie entre l'actuelle théorie des tranches longitudinales et la théorie des tranches transversales de R.T. JONES [28] pour les écoulements à $M_\infty = 1$. Dans la théorie de JONES les tranches normales à l'écoulement général sont indépendantes les unes des autres car, la célérité du son étant égale à la vitesse de l'écoulement général, les ondes sonores remontant le courant

gazeux restent dans la même tranche : celle où elles ont été émises. Dans la théorie des tranches actuelles il s'agit d'ondes sonores se propageant transversalement; ces ondes sont entraînées vers l'aval avec une vitesse tellement supérieure à leur vitesse propre de propagation, que, lorsqu'elles se sont éloignées, si peu que ce soit, du plan $y = \text{Cte}$, où elles ont pris naissance, leur influence n'est plus en mesure de se faire sentir sur l'aile.

Il ne sera probablement pas inutile de rassembler les résultats obtenus dans un énoncé en trois parties.

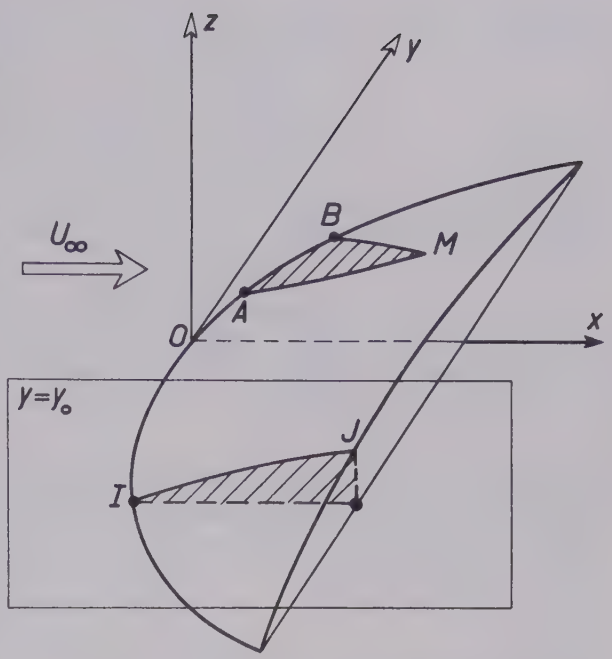


Fig. 8 - Illustrant la théorie des tranches.

PREMIÈRE PARTIE

Etant donné un profil d'aile mince d'envergure infinie - épaisseur δ, corde c, épaisseur relative $\tau = \delta/c$ - *éventuellement déformable, d'équation* - dans un système d'axes $Oxyz$ liés à l'aile - :

$$z = \tau c f\left(\frac{x}{c},\ t\right), \tag{58}$$

qui se déplace à une vitesse hypersonique $U_\infty(t)$, *éventuellement variable avec le temps, dans la direction de l'axe Ox négatif, relativement à un air au repos de caractéristiques* p_∞, ρ_∞, T_∞, a_∞ - le nombre de Mach associé est $M_\infty = U_\infty/a_\infty \gg 1$ - ; *lors du passage de l'aile, l'air est violemment perturbé dans une couche de choc relativement peu étendue* - de dimensions transversales qui sont du même ordre de grandeur que l'épaisseur de l'aile - *limitée par une onde de choc d'équation :*

$$z = \tau c g\left(\frac{x}{c},\ t\right). \tag{59}$$

Le gaz étant considéré comme parfait, la fonction f et les caractéristiques de l'air au repos étant fixées; si l'on imagine l'écoulement dans la couche de choc comme fonction de τ *et de* M_∞ *et que l'on fasse tendre simultanément* τ *vers zéro et* M_∞ *vers l'infini, de manière que le produit*

$$k = \tau M_\infty, \tag{60}$$

garde une valeur constante; alors, moyennant une définition convenable, un écoulement limite déterminé est obtenu dans la couche de choc infiniment aplatie sur le plan $z = 0$; *cet écoulement limite ne dépend que de la fonction* $f\left(\frac{x}{c},\ t\right)$ *et de k, auquel on donne le paramètre de similitude hypersonique* - et naturellement de la nature du gaz par l'intermédiaire du rapport des chaleurs spécifiques γ. *La définition convenable à laquelle il a été fait allusion est la suivante : en premier lieu il faut adopter des échelles de longueur convenables sur les axes, ce qui s'obtient en posant :*

$$x = c\bar{x}, \quad z = \tau c\bar{z}\,; \tag{61}$$

en second lieu les caractéristiques de l'écoulement doivent être définies par les quantités barrées dans les expressions :

$$\begin{cases} p = \gamma p_\infty M_\infty^2 \tau^2 \bar{p}, \quad \rho = \rho_\infty \bar{\rho}, \quad a = M_\infty \tau \bar{a}, & (a) \\ \vec{V} = U_\infty \left\{ (1 + \tau^2 \bar{u})\vec{x} + \tau \bar{w}\vec{z} \right\}. & (b) \end{cases} \tag{62}$$

En fait les comportements asymptotiques suivants sont valables

$$
(63)\quad
\begin{cases}
\bar{p}(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,\tau,M_\infty) = p^*(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,k) + O\left(\tau+\dfrac{1}{M_\infty}\right)\\
\bar{\rho}(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,\tau,M_\infty) = \rho^*(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,k) + O\left(\tau+\dfrac{1}{M_\infty}\right)\\
\bar{a}(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,\tau,M_\infty) = a^*(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,k) + O\left(\tau+\dfrac{1}{M_\infty}\right)\\
\bar{u}(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,\tau,M_\infty) = u^*(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,k) + O\left(\tau+\dfrac{1}{M_\infty}\right)\\
\bar{w}(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,\tau,M_\infty) = w^*(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,k) + O\left(\tau+\dfrac{1}{M_\infty}\right)\\
\bar{g}(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,\tau,M_\infty) = g^*(\bar{x},\bar{z},t;\gamma,k) + O\left(\tau+\dfrac{1}{M_\infty}\right)
\end{cases}
$$

La détermination des fonctions p^*, ρ^*, w^*, g^* *s'effectue en résolvant un problème d'écoulement monodimensionnel non stationnaire, ou plus exactement* - si le profil est déformable - *une infinité à un paramètre de tels problèmes. Les fonctions* a^* *et* u^* *s'en déduisent, la première trivialement par la relation* $a^{*2}=\gamma p^*/\rho^*$, *la seconde par la relation suivante :*

$$
(64)\qquad 2u^* + w^{*2} + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p^*}{\rho^*} = \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{k^2},
$$

qui est déduite de l'équation de l'énergie.

Lorsque les conditions suivantes :

$$
(65)\qquad \tau \ll 1, \qquad M_\infty \gg 1, \qquad M_\infty\tau = O(1)
$$

sont réalisées, en remplaçant k *par* $M_\infty\tau$ *dans les fonctions figurant aux seconds membres de* (63), *on obtient toute une famille d'écoulements hypersoniques sur une famille de profils affins. Cela conduit à la règle de similitude hypersonique : considérons deux profils affins d'épaisseurs relatives* τ_1 *et* τ_2, *deux écoulements hypersoniques de nombres de Mach* M_{∞_1} *et* M_{∞_2} *sur ces profils sont semblables pourvu que :*

$$
(66)\qquad M_{\infty_1}\tau_1 = M_{\infty_2}\tau_2 .
$$

Lorsque les profils considérés exécutent des oscillations de déformation à très haute fréquence ω *et de très faible longueur d'onde* λ, *la règle de similitude est conservée moyennant la condition supplémentaire :*

$$
(67)\qquad \left(\frac{\omega c}{U_\infty}+\frac{c}{\lambda}\right)\left(\tau+\frac{1}{M_\infty}\right) \ll 1.
$$

DEUXIÈME PARTIE -

Etant donné une aile d'envergure finie - épaisseur δ, corde c, envergure d, épaisseur relative $\tau = \delta/c$, allongement $A = d/c$ -, *moyennant les conditions*

$$
(68)\qquad \tau \ll 1, \qquad M_\infty \gg 1, \qquad \tau A^{-1} \ll 1, \qquad M_\infty\tau = O(1),
$$

et éventuellement, la condition supplémentaire (67), *l'écoulement hypersonique qui prend place dans les conditions de l'énoncé précédent, peut être calculé, sauf dans certaines régions, par le procédé de tranches qui consiste à considérer chaque profil, section par un plan* $y = C^{te}$, *comme isolé. La variable* y *intervient alors comme un simple paramètre.*

TROISIÈME PARTIE -

Etant donné un corps fuselé élancé - corde c, épaisseur δ, épaisseur relative $\tau = \delta/c$ - *d'équation :*

$$
(69)\qquad
\begin{cases}
y = r\cos\Phi,\ z = r\sin\Phi,\\
r = \tau c f\left(\dfrac{x}{c},\Phi,t\right)
\end{cases}
$$

le premier énoncé est valable à condition de remplacer (61) par

$$x = c\bar{x}, \qquad y = \tau c\bar{y}, \qquad z = \tau c\bar{z}, \qquad r = \tau c\bar{r}, \tag{70}$$

et (62) *par*

$$\begin{cases} p = \gamma p_\infty M_\infty^2 \tau^2 \bar{p}, \quad \rho = \rho_\infty \bar{\rho}, \quad a = M_\infty \tau \bar{a}, \\ \vec{V} = U_\infty \left\{ (1+\tau^2\bar{u})\vec{x} + \tau\bar{v}\vec{y} + \tau\bar{w}\vec{z} \right\}; \end{cases} \tag{71}$$

p^*, ρ^*, ... , *fonctions de* $\bar{x}$, $\bar{r}$, ϕ, $M_\infty\tau$, γ *sont alors déterminés par une infinité* –à un paramètre si le profil est indéformable, à deux paramètres si le profil est déformable– *de problèmes d'écoulements bidimensionnels non stationnaires.*

Les conclusions rassemblées dans le triple énoncé précédent ne sont assurément pas nouvelles et sont contenues dans l'analyse déjà fort ancienne de HAYES [25] qui faisait elle-même suite à une analyse un peu plus ancienne mais incomplète de TSIEN [47]. La méthode d'exposition suivie ici n'est pas celle de HAYES, mais elle développe une idée de M. Paul GERMAIN (*) (**).

La notion de similitude hypersonique est fort précieuse, elle permet d'exploiter les résultats expérimentaux. En ce qui concerne les efforts globaux elle s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} C_x = \left(\frac{\delta}{c}\right)^3 F\left(\frac{d}{c}, M_\infty \frac{\delta}{c}, \gamma\right), \\ \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\delta}{c}\right) G\left(\frac{d}{c}, M_\infty \frac{\delta}{c}, \gamma\right). \end{cases} \tag{72}$$

Dans ces formules il s'agit du coefficient de résistance et du gradient initial du coefficient de portance d'ailes géométriquement semblables –plus exactement déduites les unes des autres par une double affinité–, lorsque la surface de chaque aile est prise comme surface de référence. D'après (72) il suffit de faire varier M_∞ ou l'épaisseur relative δ/c pour déterminer la dépendance des efforts globaux relativement à ces deux paramètres. Conformément à la théorie des tranches, la dépendance des fonctions F et G relativement à l'allongement d/c doit même disparaître. En effet, si la forme de l'aile et δ/c sont maintenus fixes, d/c étant varié, les profils section par des plans caractérisés par la même valeur de cy/d sont identiques et supportent la même pression; comme l'aire de référence varie exactement comme d/c, l'on voit que (72) peut s'écrire sous la forme plus simple :

$$\begin{cases} C_x = \left(\frac{\delta}{c}\right)^3 F\left(M_\infty \frac{\delta}{c}, \gamma\right), \\ \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \left(\frac{\delta}{c}\right) G\left(M_\infty \frac{\delta}{c}, \gamma\right). \end{cases} \tag{73}$$

En fait, il y a des régions de l'aile où le concept de tranches n'est pas valable, de sorte que (73) n'est qu'une forme approximative de (72).

Pour les obstacles fuselés, (73) est exacte car δ/c est alors le seul paramètre d'échelle intervenant, mais dans le cas des corps fuselés on prend généralement comme aire de référence l'aire du maître couple, aussi les formules (73) sont-elles, dans ce cas, à remplacer par

$$\begin{cases} C_x = \left(\frac{\delta}{c}\right)^2 F\left(M_\infty \frac{\delta}{c}, \gamma\right), \\ \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = G\left(M_\infty \frac{\delta}{c}, \gamma\right). \end{cases} \tag{74}$$

Tous les résultats précédents supposent que le gaz est parfait. Il n'est pas nécessaire de reprendre la question pour tenir compte des effets de gaz réels, les modifications à apporter étant, formellement, très simples. Il est à peine utile d'ajouter que la notion de gaz parfait est relative aux propriétés d'équilibre du gaz et non à ses propriétés de transport. Dans tout le présent travail, les coefficients de transport –viscosité, conductibilité ... – sont toujours

---

(*) P. GERMAIN - Leçons non publiées données à la Sorbonne en 1957-1958.

(**) En améliorant les estimations, on voit que l'erreur, dans (63), est en $\tau^2 + M_\infty^{-2}$.

supposés nuls. Cela ne veut pas dire que les propriétés de transport n'aient qu'une influence négligeable en hypersonique, bien au contraire. La notion de similitude hypersonique lorsque l'on tient compte des propriétés en question a été récemment discutée très en détail dans un mémoire de HAYES et PROBSTEIN [27]. En revanche, en fluide non visqueux et non conducteur de la chaleur, la notion de similitude hypersonique, pour des obstacles à nez émoussé, ne nous paraît pas, malgré un récent et fort intéressant mémoire de CHENG [1], avoir reçu de traitement tout à fait satisfaisant. C'est précisément le but du chapitre III que d'aboutir à une formulation correcte de la similitude hypersonique pour des obstacles à nez émoussés, et le lecteur pourra considérer que le présent paragraphe a été écrit pour servir d'introduction au chapitre III. Insistons donc encore une fois sur le fait que les formules du présent paragraphe, et en particulier les formules (72) à (74) ne sont valables que pour les obstacles à arête en lame de couteau parfaitement acérée ou à pointe parfaitement vive.

La remarque suivante sera utile au cours du chapitre III. Dans la première partie de l'énoncé qui a été donné un peu plus haut, la constance du conduit $M_\infty \tau$ n'a aucun rôle à jouer. Il suffit que :

$$k = \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ M_\infty \to \infty}} (M_\infty \tau), \tag{75}$$

existe pour que les conclusions subsistent. Il se pourrait même que M_∞ croisse plus vite que τ ne tend vers zéro de sorte que

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ M_\infty \to \infty}} (M_\infty \tau) = +\infty . \tag{76}$$

L'écoulement limite obtenu est alors la limite d'un écoulement hypersonique limite – à k fini – lorsque $k \to \infty$. Pour se convaincre de cette propriété il suffit de noter que les estimations des erreurs, faites sur les formules (33), font intervenir la combinaison $\tau + \frac{1}{M_\infty}$.

Une dernière remarque pour signaler que VAN DYKE [49] est parvenu à améliorer de manière tout à fait substantielle l'efficacité numérique de la similitude hypersonique, en substituant $\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ à M_∞.

I,2. ÉCOULEMENT SUR UN DIÈDRE LÉGÈREMENT DÉFORMABLE.

Les problèmes aux limites qui viennent d'être posés, comportant la résolution du système d'équations aux dérivées partielles (54) moyennant les conditions aux limites (46), (52), (53) sont trop difficiles pour que l'on puisse espérer obtenir autre chose que des solutions particulières ou des solutions approchées.

Toutes les solutions exactes, particulières, connues sont relatives aux cas où l'existence d'un groupe de transformations, laissant invariant équations et conditions aux limites, permet d'opérer une réduction supplémentaire et de ramener le système (54) à un système différentiel ordinaire. Il s'agit des écoulements stationnaires, bidimensionnels sur des obstacles en forme de profils d'ailes ou d'ogives de révolution dont l'équation est de la forme :

$$z = \tau c \left(\frac{x}{c}\right)^n . \tag{1}$$

Le dièdre et le cône de révolution sont naturellement les plus simples parmi les obstacles de cette nature, et les solutions correspondantes sont bien connues. Celle relative au dièdre a déjà été donnée en (1.16-18). La solution relative au cône nécessite l'intégration numérique d'une équation différentielle. Il est commode de condenser dans un même groupe de formules la solution relative aux deux types d'écoulements. Soit θ l'angle d'inclinaison du dièdre ou l'angle de demi-ouverture du cône, soit de même β l'angle d'inclinaison de l'onde de choc ou l'angle de demi-ouverture du cône de choc, l'on a, en employant la notation ε en indice pour caractériser

les deux écoulements – $\varepsilon = 0$ pour un dièdre et $\varepsilon = 1$ pour le cône – :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{p}{p_\infty} = P_\varepsilon(M_\infty \theta), & a)\ \textit{(pression à la surface du cône).} \\ M_\infty \beta = G_\varepsilon(M_\infty \theta) & b)\ \textit{(angle de l'onde de choc conique attachée).} \end{cases}$$

Les fonctions P_1 et G_1 n'ont pas de représentation analytique explicite contrairement à P_0 et G_0, mais cela est sans grande importance.

Les formules (2) seront utilisées dans la section 3 du chapitre III, il nous suffira alors de connaître leur définition numérique et leur comportement asymptotique :

$$(3)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{P_\varepsilon(k)}{k^2} = A_\varepsilon(\gamma), \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{G_\varepsilon(k)}{k} = B_\varepsilon(\gamma); \end{cases}$$

l'on a manifestement $A_0 = \dfrac{\gamma(\gamma+1)}{2}$, $B_0 = \dfrac{\gamma+1}{2}$, alors que, pour $\gamma = 1{,}4$, en se reportant au mémoire de VAN DYKE [48] l'on trouve $A_1 = 1{,}465$, $B_1 = 1{,}094$.

Les solutions exactes correspondant aux obstacles de la forme (1) ne seront pas discutées, car il n'en sera pas fait usage dans la suite de ce travail. Cette question est discutée dans un mémoire de LEES et KUBOTA [35] ainsi que dans le livre de HAYES et PROBSTEIN [26]. La voie avait été ouverte à propos du problème de RIEMANN, ou encore de l'explosion d'une charge ponctuelle, linéaire ou plane, par G.I. TAYLOR et également par L.I. SEDOV.

Parmi les solutions approchées, certaines sont totalement empiriques. Telle est l'approximation tangentielle qui adopte la formule (2 *a*) pour obtenir la pression sur un obstacle. D'autres solutions approchées ont une base théorique solide. Elles peuvent être utilisées chaque fois que l'on a la chance de découvrir un paramètre fondamental de l'écoulement qui peut être réputé petit. Telles sont d'une part l'approximation newtonienne, dans laquelle on considère que $\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$ est petit devant l'unité, ainsi que $\dfrac{1}{k^2}$, inverse du carré du paramètre de similitude hypersonique; d'autre part la méthode de choc détente, dans laquelle on considère que le rapport entre les intensités des deux systèmes d'ondes de pressions, transportées par les deux systèmes de lignes caractéristiques, est petit devant l'unité. Les méthodes approchées qui en résultent sont obtenues en supposant que les paramètres réputés petits sont, en fait, nuls. Ces méthodes approchées sont théoriquement fondées si elles peuvent être ainsi considérées, soit comme le premier terme d'un développement asymptotique – tel est le cas de l'approximation newtonienne –, soit comme la première étape d'un schéma d'approximations successives – tel est le cas de la méthode de choc détente –.

La méthode de choc détente déborde le cadre de la théorie hypersonique des petites perturbations, toutefois, ce n'est que dans ce cadre qu'elle se laisse conduire jusqu'à l'obtention de formules complètement explicites. Cette méthode sera exposée dans le chapitre II qui lui est entièrement consacré. L'approximation newtonienne déborde tellement le cadre de la théorie hypersonique des petites perturbations qu'il ne serait pas justifié d'en entreprendre l'étude systématique dans ce travail. D'ailleurs les progrès récents réalisés à l'aide de cette méthode ont été longuement discutés dans le livre de HAYES et PROBSTEIN [26], ainsi que dans deux mémoires de l'auteur [18] [19]. Toutefois, puisque l'approximation newtonienne doit être utilisée dans le chapitre III, une brève discussion en sera présentée, dans le cadre de la théorie des petites perturbations uniquement, à la fin du présent chapitre.

Dans les méthodes précédentes les approximations portent sur la nature de l'écoulement c'est-à-dire sur les équations aux dérivées partielles et non sur la forme de l'obstacle lui-même.

En effet, les méthodes en question prétendent fournir l'écoulement correspondant à un obstacle de forme arbitraire - dans la classe des obstacles qui relèvent de la théorie des petites perturbations, et moyennant, peut-être, quelques restrictions.

Il existe un troisième groupe de solutions approchées pour lesquelles les approximations essentielles portent sur la forme de l'obstacle. De telles méthodes sont caractérisées par le fait qu'elles recherchent, par linéarisation, des solutions voisines de solutions exactes connues, en supposant que l'obstacle est voisin d'un obstacle de la forme (1). Cela peut être envisagé d'un double point de vue. Dans un premier point de vue on peut considérer que l'obstacle est arbitraire mais que son comportement est donné par (1) en $x = 0$; dans ces conditions, le matériel de solutions exactes connues fournit une représentation de l'écoulement en $x = 0$, et l'on cherche à étendre cette représentation dans un voisinage plus ou moins étendu de $x = 0$. L'on obtient ainsi la méthode de solution par développement en série, mise en œuvre effectivement par VAN DYKE [49] pour $n = 1$ et KUBOTA [31] pour $n < 1$. Dans un second point de vue, on restreint l'obstacle en supposant que celui-ci est uniformément voisin d'un obstacle tel que (1), et ce faisant, il n'est plus nécessaire de restreindre le domaine de validité de la solution à un voisinage de $x = 0$. Ce second point de vue a été développé indépendamment par KOGAN [30] et l'auteur [15]. Il avait été également, et antérieurement, développé par GERMAIN [14] et GUDERSEN [14] [23] sans référence particulière à la théorie hypersonique des petites perturbations, à propos du problème de RIEMANN qui se pose, par exemple, lors de l'étude des performances d'un tube de choc voisin d'un tube de choc idéal.

Le premier point de vue est plus limité que le second dont il n'est qu'un cas particulier; corrélativement il est plus simple et peut être mené plus loin. La méthode du développement en série conduit à l'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires, et VAN DYKE [48] a effectivement calculé les trois premiers termes d'un tel développement en série. La seconde méthode, par contre, conduit à des équations aux dérivées partielles linéaires, et les complications d'écriture deviennent considérables si l'on veut pousser au-delà de la linéarisation.

D'ailleurs les deux méthodes se complètent si l'on considère leurs domaines d'utilisation respectifs. La première méthode est plus spécialement adaptée à l'étude de l'écoulement stationnaire sur un obstacle convexe. A condition de retenir trois termes dans les développements en série, lorsque l'obstacle est régulier une bonne approximation est obtenue pour la pression à la surface de l'obstacle, sur une fraction importante de ce dernier. D'un autre côté la seconde méthode convient plus spécialement à l'étude d'écoulements non stationnaires. Dans l'étude des oscillations de déformation d'un obstacle il est possible de supposer que l'obstacle déformé est uniformément voisin de l'obstacle non déformé, sans être toutefois suffisamment régulier pour que la méthode par développement en série puisse être de quelque utilité.

Les calculs présentés ici développent la seconde méthode dans le cas où l'écoulement de base est l'écoulement sur un dièdre. La différence avec KOGAN [30] tient essentiellement au choix des variables dépendantes et indépendantes. KOGAN utilise comme variables dépendantes d'une part la fonction de courant qui est une fonction de deux variables, d'autre part la fonction donnant la forme de l'onde de choc, fonction d'une variable. Les variables indépendantes sont les coordonnées cartésiennes naturelles. Dans ces conditions les frontières portant les conditions aux limites sont mobiles et l'on sait tout ce que cela comporte. Dans la méthode suivie ici, qui développe une courte note [15] précédente, la fonction de courant est prise comme variable indépendante. Les variables dépendantes sont une fonction de deux variables et une fonction d'une variable, fonctions qui permettent de réaliser une application de l'écoulement de base sur l'écoulement perturbé. Il faut en effet une fonction d'une variable pour appliquer les deux ondes de choc l'une sur l'autre et une fonction de deux variables pour appliquer l'un sur l'autre les deux réseaux de lignes de courant. La méthode suivie fixe automatiquement les frontières portant les conditions aux limites. Même en dehors de toute hypothèse

de linéarisation la méthode conduit à formuler un problème aux limites à frontières fixes dont l'interprétation est claire. Après linéarisation l'on constate que ce problème peut être complètement résolu, et qu'il s'apparente au quatrième problème dans la terminologie de PICARD [41] sans que cela soit réellement une identité. En fait il s'agit d'un "cinquième problème" qui peut se formuler ainsi : trouver une fonction de deux variables $f(x, y)$ et une fonction d'une variable $g(y)$, vérifiant une relation aux dérivées partielles du second ordre –il s'agit des dérivées partielles des deux fonctions–, et trois conditions aux limites sur $x = 0$ et $y = 0$. Ces conditions aux limites sont d'une part les valeurs de f sur $x = 0$ et $y = 0$ –tel est le quatrième problème– d'autre part une relation entre $\partial f/\partial x$ et dg/dy sur $x = 0$. Enfin, condition essentielle, les frontières $x = 0$, $y = 0$ sont comprises dans l'angle des lignes caractéristiques de la relation aux dérivées partielles, considérée comme équation aux dérivées partielles au sens ordinaire en f, lorsque l'on y regarde la fonction g comme une donnée.

Le profil déformable considéré est supposé avoir une équation de la forme :

$$z = \theta_0 x + f(x, t), \qquad \theta_0 \ll 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \ll \theta_0, \tag{4}$$

l'onde de choc attachée correspondante étant :

$$z = \beta_0 x + g(x, t). \tag{5}$$

La première opération consiste à passer en axes XZT et à couper par un plan $X = X_0$. En désignant par $U_\infty(T_0)$ la vitesse locale du profil, cela conduit à considérer un piston dont la loi du mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} Z = \theta_0 U_\infty(T_0)(T - T_0) + F(T), \\ F(T) = f\big(U_\infty(T_0)(T - T_0),\ T\big). \end{cases} \tag{6}$$

Dans son mouvement, le piston précédent chasse devant lui une onde de choc dont la loi du mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} Z = \beta_0 U_\infty(T_0)(T - T_0) + G(T), \\ G(T) = g\big(U_\infty(T_0)(T - T_0),\ T\big). \end{cases} \tag{7}$$

Après avoir introduit la fonction de trajectoire

$$\psi = \psi\big(U_\infty(T_0)(T - T_0),\ Z\big), \tag{8}$$

qui reste constante lorsqu'une particule fluide est suivie dans son mouvement, le principe de la méthode est alors de définir une transformation géométrique :

$$\begin{cases} U_\infty(T_0)(T - T_0) = X^*(\xi, \eta), \\ Z = Y^*(\xi, \eta), \end{cases} \tag{9}$$

qui applique l'onde de choc (7) et les trajectoires $\psi = C^{te}$ du problème perturbé sur l'onde de choc

$$Z = \beta_0 U_\infty(T_0)(T - T_0), \tag{10}$$

et les trajectoires

$$Z - \theta_0 U_\infty(T_0)(T - T_0) = C^{te}, \tag{11}$$

de l'ecoulement de base non perturbé, correspondant à $F = G = 0$. L'on veut même, de manière plus précise, que l'onde de choc soit appliquée sur $\xi = 0$ et que les trajectoires soient appliquées sur les lignes $\eta = C^{te}$. Cela peut être réalisé en spécialisant (9) comme suit :

$$\begin{cases} U_\infty(T_0)(T - T_0) = \xi + \eta + X(\eta), \\ Z = \theta_0 \xi + \beta_0 \eta + Y(\xi, \eta), \end{cases} \tag{12}$$

avec la condition

$$\psi\big[\xi + \eta + X(\eta),\ \theta_0 \xi + \beta_0 \eta + Y(\xi, \eta)\big] = \rho_\infty \beta_0 \eta. \tag{13}$$

La question des conditions aux limites à imposer aux fonctions $X(\eta)$ et $Y(\xi, \eta)$ sur l'obstacle $\eta = 0$, et sur l'onde de choc $\xi = 0$, est examinée en premier lieu. Sur l'obstacle, la chose est immédiate :

$$\begin{cases} Y(\xi, 0) = f\Big(\xi,\ T_0 + \dfrac{\xi}{U_\infty(T_0)}\Big), \\ X(0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Sur l'onde de choc, une première condition est relative à la continuité de ψ, cela donne :

(15) $$Y(0,\eta) = 0.$$

Ceci étant, la vitesse de déplacement de l'onde de choc est donnée par :

(16) $$w_c = \beta U_\infty(T_0),$$

avec

(17) $$\beta = \frac{\beta_0}{1 + X_\eta},$$

alors que, immédiatement en aval de l'onde de choc, la vitesse des particules –qui suivent des lignes η = Cte– est :

(18) $$w_\sigma = \theta U_\infty(T_0)$$

avec

(19) $$\theta = \theta_0 + Y_\xi(0,\eta);$$

mais la vitesse w_σ est encore donnée par la relation (1.49-c) avec $v_n = w_c$ donné par (16), de sorte que, en introduisant la fonction :

(20) $$\omega(\beta) = \frac{2}{\gamma+1}\,\beta\left(1 - \frac{1}{M_\infty^2\beta^2}\right),$$

il vient une seconde condition relative à l'onde de choc :

(21) $$\theta_0 + Y_\xi(0,\eta) = \omega\left(\frac{\beta_0}{1+X_\eta}\right).$$

Les conditions (1.49 a-b) n'ont aucun rôle à jouer dans la formulation actuelle, –au bout du compte, ces conditions seront en effet automatiquement vérifiées–; par contre la condition qui en résulte et qui est relative à

(22) $$\Sigma = \frac{p}{p_\infty}\left(\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)^\gamma = \exp\left(\frac{S - S_\infty}{c_v}\right),$$

joue un rôle important. Il est clair qu'après avoir posé

(23) $$\phi(M_\infty\beta) = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_\infty^2\beta^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M_\infty^2\beta^2}\right)^\gamma,$$

il vient $\Sigma = \phi(M_\infty\beta)$ sur l'onde de choc, et comme Σ reste constant sur une trajectoire, il en résulte que, dans tout l'écoulement

(24) $$\Sigma = \phi\left(\frac{M_\infty\beta_0}{1+X_\eta(\eta)}\right).$$

La fonction $X(\eta)$ est en relation directe avec la fonction $g(x,t)$ donnant la forme de l'onde de choc dans le plan physique. En effet, l'on a

(25) $$\beta_0 X(\eta) + g\left[\eta + X(\eta),\ T_0 + \frac{\eta + X(\eta)}{U_\infty(T_0)}\right] = 0.$$

Avant de rechercher la relation aux dérivées partielles que doivent vérifier $X(\eta)$ et $Y(\xi,\eta)$, montrons comment la connaissance de ces fonctions permet de déterminer complètement l'écoulement. En ce qui concerne le vecteur vitesse, la chose est immédiate avec

(26) $$\vec{V} = U_\infty(t)\left[1 + O(\theta_0^2)\right]\vec{x} + U_\infty(t)\left[\theta_0 + Y_\xi(\xi,\eta)\right]\vec{z},$$

et (12). Pour la masse spécifique ρ il suffit de faire appel à l'équation de conservation de la masse (1.43a) qui permet d'écrire :

(27) $$d\psi = \rho(dZ - w dT),$$

de sorte que, en substituant (12), (13), (26) il vient :

(28) $$\rho\left[\beta_0 + Y_\eta - (\theta_0 + Y_\xi)(1 + X_\eta)\right] = \rho_\infty\beta_0,$$

d'où $\rho(x, z, t)$ grâce à (28) et (12). Enfin, pour p la relation suivante est utilisée :

(29) $$\frac{p}{p_\infty} = \left\{\frac{\beta_0}{\beta_0 + Y_\eta - (\theta_0 + Y_\xi)(1+X_\eta)}\right\}^\gamma \phi\left(\frac{M_\infty\beta_0}{1+X_\eta}\right).$$

Il est clair que les fonctions p et ρ que l'on peut déduire de (28) et (29) vérifient automatiquement les conditions (1.49 a-b).

La relation aux dérivées partielles que doivent vérifier les fonctions X et Y est finalement obtenue en écrivant que l'écoulement défini par (26) (28) et (29) vérifie les équations du mouvement (1.43). Or, seule l'une de ces équations n'est pas automatiquement satisfaite par le procédé de construction précédent. Il s'agit de l'équation (1.43 c) –avec $V = 0$–, et un calcul simple montre que, dans la formulation actuelle, cette équation prend la forme :

$$(30)\qquad M_\infty^2 \beta_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta} - (1+X_\eta)\frac{\partial}{\partial \xi}\right\}\cdot\left\{\left[\frac{\beta_0}{\beta_0 + Y_\eta - (\theta_0 + Y_\xi)(1+X_\eta)}\right]^\gamma \phi\left(\frac{M_\infty \beta_0}{1+X_\eta}\right)\right\} = 0.$$

En développant cette équation il vient la relation différentielle (33 a) ci-dessous qui est la relation différentielle cherchée entre X et Y. C'est une relation quasi-linéaire du second ordre –(33 a) ci-dessous– et les coefficients en sont donnés par les formules :

$$(31)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = (1+X_\eta)^2 - M_\infty^2 \beta_0^{1-\gamma} \dfrac{\left[\beta_0 + Y_\eta - (\theta_0 + Y_\xi)(1+X_\eta)\right]^{\gamma+1}}{\phi\left(\dfrac{M_\infty \beta_0}{1+X_\eta}\right)} & a) \\ \mathcal{B} = 1 + X_\eta, \qquad \mathcal{C} = 1, & b)\ c) \\ \mathcal{D} = (\theta_0 + Y_\xi)\,\mathcal{G}, & d) \\ \mathcal{G} = 1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{M_\infty \beta_0}{(1+X_\eta)^2}\dfrac{\beta_0 + Y_\eta - (\theta_0 + Y_\xi)(1+X_\eta)}{\theta_0 + Y_\xi}\dfrac{H\left(\dfrac{M_\infty \beta_0}{1+X_\eta}\right)}{\phi\left(\dfrac{M_\infty \beta_0}{1+X_\eta}\right)}, & e) \end{cases}$$

avec

$$(32)\qquad H(M_\infty \beta) = \frac{d\phi(M_\infty \beta)}{d(M_\infty \beta)}.$$

Il vient donc d'être établi que la recherche de l'écoulement plan non stationnaire sur le profil mince, déformable, défini par (4) est équivalente à la recherche d'un système de deux fonctions $X(\eta)$ et $Y(\xi, \eta)$ vérifiant la relation aux dérivées partielles quasi-linéaire du second ordre et les conditions aux limites suivantes :

$$(33)\quad \begin{cases} \mathcal{A}(Y_\xi, Y_\eta, X_\eta)\dfrac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} - 2\,\mathcal{B}(Y_\xi, Y_\eta, X_\eta)\dfrac{\partial^2 Y}{\partial \xi \partial \eta} + \mathcal{C}(Y_\xi, Y_\eta, X_\eta)\dfrac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} = \\ \qquad\qquad \mathcal{D}(Y_\xi, Y_\eta, X_\eta)\dfrac{d^2 X}{d\eta^2}, & a) \\ Y(0, \eta) = 0, & b) \\ Y_\xi(0, \eta) = \omega\left(\dfrac{\beta_0}{1+X_\eta}\right) - \theta_0, & c) \\ Y(\xi, 0) = f\left(\xi, T_0 + \dfrac{\xi}{U_\infty(T_0)}\right), & d) \end{cases}$$

lesquelles définissent un problème aux limites du type précédemment décrit. Lorsque la solution de ce problème est connue, les formules (26) (28) (29) définissent la pression, la masse spécifique et le vecteur vitesse en fonction de (ξ, η). Il reste seulement à revenir aux variables physiques initiales x, z, t. Pour cela il suffit d'utiliser (12) en remarquant que

$$x = L(T) - L(T_0) = U_\infty(T_0)[T - T_0],$$

et en prenant garde que, puisque T_0 intervient comme paramètre dans (33 d), les fonctions X et Y dépendent a priori de T_0. Ainsi l'on a

$$(34)\qquad \begin{cases} x = \xi + \eta + X(\eta, T_0), \\ z = \theta_0 \xi + \beta_0 \eta + Y(\xi, \eta, T_0), \\ t = T_0 + \dfrac{x}{U_\infty(T_0)}, \end{cases}$$

soit encore, en raison de (1.33 a)

$$(35)\qquad \begin{cases} x = \xi + \eta + X\left(\eta, t - \dfrac{x}{U_\infty(t)}\right), \\ z = \theta_0 \xi + \beta_0 \eta + Y\left(\xi, \eta, t - \dfrac{x}{U_\infty(t)}\right). \end{cases}$$

Le problème (33) est maintenant linéarisé en supposant que la fonction $f(x, t)$ est de la forme :

$$(36)\qquad f(x, t) = \varepsilon \theta_0 \bar{f}(x, t), \qquad (\varepsilon \ll 1)$$

de sorte que l'obstacle (4) est uniformément voisin d'un dièdre. Il est clair que

$$(37)\qquad \begin{cases} X(\eta) = \varepsilon \bar{X}(\eta) + 0(\varepsilon^2), \\ Y(\xi, \eta) = \theta_0 \varepsilon \bar{Y}(\xi, \eta) + 0(\varepsilon^2), \end{cases}$$

et un calcul simple montre que, en posant

$$(38)\qquad \begin{cases} A^2 = \dfrac{(\gamma-1) M_\infty^2 \beta_0^2 + 2}{2\gamma M_\infty^2 \beta_0^2 - (\gamma-1)}, \\ G = \dfrac{2 M_\infty^2 \beta_0^2 + (\gamma-1)}{2\gamma M_\infty^2 \beta_0^2 - (\gamma-1)}, \\ \mu = \dfrac{M_\infty^2 \beta_0^2 + 1}{M_\infty^2 \beta_0^2 - 1}, \end{cases}$$

la forme linéarisée de (33) est

$$(39)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} - \dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 \bar{Y} - A^2 \dfrac{\partial^2 \bar{Y}}{\partial \xi^2} = G \dfrac{d^2 \bar{X}}{d\eta^2}, & a) \\ \bar{Y}(0, \eta) = 0, & b) \\ \bar{Y}_\xi(0, \eta) + \mu \bar{X}_\eta = 0 & c) \\ \bar{Y}(\xi, 0) = \bar{f}\left(\xi, T_0 + \dfrac{\xi}{U_\infty(T_0)}\right) & d) \end{cases}$$

La solution de ce "cinquième problème aux limites" s'obtient sans difficulté comme suit. En désignant par U et V des fonctions arbitraires, et en posant :

$$(40)\qquad \bar{Y}(\xi, \eta) = U(\xi + a\eta) + V(\xi + b\eta) + GX(\eta),$$

l'équation (39 a) est certainement vérifiée pourvu que :

$$(41)\qquad \begin{aligned} a &= 1 + A, \\ b &= 1 - A. \end{aligned}$$

Les conditions (39 b- c) fournissent les deux relations suivantes :

$$(42)\qquad \begin{cases} aU'(a\eta) + bV'(b\eta) + GX'(\eta) = 0, \\ U'(a\eta) + V'(b\eta) + \mu X'(\eta) = 0, \end{cases}$$

de sorte que, en introduisant m et n définis par :

$$(43)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{(1-A^2)\mu - (1+A)G}{2A} = \dfrac{A-G}{2}, \\ n = \dfrac{(1-A)G - (1-A^2)\mu}{2A} = -\dfrac{A+G}{2}, \end{cases}$$

il vient

$$(44)\qquad \begin{cases} U(\zeta) = mX\left(\dfrac{\zeta}{a}\right) + C_1, \\ V(\zeta) = nX\left(\dfrac{\zeta}{b}\right) + C_2. \end{cases}$$

En substituant (44) dans (40), et en y faisant $\xi = 0$, (39 b) montre que

$$(45)\qquad 0 = \bar{Y}(0,\eta) = (m+n+G)\bar{X}(\eta) + C_1 + C_2 = C_1 + C_2,$$

de sorte que

$$(46)\qquad \bar{Y}(\xi,\eta) = m\bar{X}\left(\frac{\xi}{a} + \eta\right) + n\bar{X}\left(\frac{\xi}{b} + \eta\right) + G\bar{X}(\eta).$$

Maintenant, la condition (39 d) fournit une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction X:

$$(47)\qquad m\bar{X}\left(\frac{\xi}{a}\right) + n\bar{X}\left(\frac{\xi}{b}\right) = \bar{f}\left[\xi,\ T_0 + \frac{\xi}{U_\infty(T_0)}\right] = \varphi(\xi).$$

La solution :

$$(48)\qquad \bar{X}(\zeta) = \frac{1}{n}\sum_{K=0}^{\infty} \left(-\frac{m}{n}\right)^K \varphi\left[\left(\frac{b}{a}\right)^K b\zeta\right],$$

de cette équation n'est pas bien difficile à découvrir. Ici il suffira de la vérifier. En premier lieu on s'assure que (48) a un sens en remarquant que A et G sont positifs de sorte que (43) montre que

$$(49)\qquad \left|\frac{m}{n}\right| < 1.$$

Ensuite l'on a

$$(50)\qquad m\bar{X}\left(\frac{\zeta}{a}\right) + n\bar{X}\left(\frac{\zeta}{b}\right) = \sum_{K=0}^{\infty} (-)^K \left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{K+1} \varphi\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{K+1}\zeta\right] + \left(\frac{m}{n}\right)^K \varphi\left[\left(\frac{b}{a}\right)^K \zeta\right]\right\} = \varphi(\zeta),$$

de sorte que (48) est bien solution de (47). Mais il y a plus, cette solution est unique pourvu qu'elle soit bornée à l'origine. En effet, l'équation sans second membre correspondant à $\varphi = 0$, n'a, outre la solution identiquement nulle, que des solutions non bornées à l'origine en raison de (49), comme l'on s'en assure aisément.

La pression, la masse spécifique et la vitesse résultent de (28) (29). Il vient ainsi :

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{p}{p_\infty} = \left(\dfrac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \beta_0^2 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left\{1 + \dfrac{2\gamma(M_\infty^2\beta_0^2 - 1)}{(\gamma-1)M_\infty^2\beta_0^2 + 2}\,\varepsilon\left[\bar{Y}_\xi - \bar{Y}_\eta + G\bar{X}_\eta\right] + 0(\varepsilon^2)\right\}, \\ \dfrac{\rho}{\rho_\infty} = \dfrac{(\gamma+1)M_\infty^2\beta_0^2}{(\gamma-1)M_\infty^2\beta_0^2 + 2}\left\{1 + \dfrac{2(M_\infty^2\beta_0^2 - 1)}{(\gamma-1)M_\infty^2\beta_0^2 + 2}\,\varepsilon\left[\bar{Y}_\xi - \bar{Y}_\eta + G\bar{X}_\eta\right] + 0(\varepsilon^2)\right\}. \end{cases}$$

Pour revenir aux variables physiques initiales il suffit de remplacer ξ, η, T_0 par

$$(52)\qquad \xi = \frac{\beta_0 x - z}{\beta_0 - \theta_0}, \qquad \eta = \frac{z - \theta_0 x}{\beta_0 - \theta_0}, \qquad T_0 = t - \frac{x}{U_\infty(t)}.$$

A titre de première application il est possible de retrouver deux résultats de la méthode par développement en série : gradient de pression initial à la pointe d'un profil et rapport entre les rayons de courbure initiaux du profil et de l'onde de choc. Tout ceci en écoulement stationnaire. L'obstacle est donné sous la forme :

$$z = F(x) = xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + 0(x^3), \tag{53}$$

et, dans le voisinage de $x = 0$, on peut considérer que l'obstacle (53) est voisin du dièdre $z = \theta_0 x$ avec $\theta_0 = F'(0)$. Soit β_0 défini par

$$M_\infty \beta_0 = \frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta_0 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta_0\right)^2 + 1}, \tag{54}$$

en adoptant, dans les formules précédentes

$$\bar{X}(\zeta) = \frac{F''(0)}{F'(0)} \frac{1}{\frac{m}{a^2} + \frac{n}{b^2}} \frac{\zeta^2}{2}, \tag{55}$$

il vient :

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{2\gamma M_\infty^2 \beta_0^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left\{1 - \frac{2\gamma(M_\infty^2\beta_0^2 - 1)}{(\gamma-1)M_\infty^2\beta_0^2 + 2} \frac{F''(0)}{F'(0)}\left(1 - \frac{\frac{m}{a} + \frac{n}{b}}{\frac{m}{a^2} + \frac{n}{b^2}}\right) x + 0(x^2)\right\} \tag{56}$$

et pour l'onde de choc

$$z = \beta_0 x \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{F''(0)}{F'(0)} \frac{x}{\frac{m}{a^2} + \frac{n}{b^2}} + 0(x^2)\right\}. \tag{57}$$

En substituant les valeurs de m, n, a, b déduites de (38) (41) et (43) et en notant C_p le coefficient de pression et R_c, R_0 les rayons de courbure de l'onde de choc et de l'obstacle, l'on trouve :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial C_p}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{(\gamma+1)[3M_\infty^2\beta_0^2 + 1][2\gamma M_\infty^2\beta_0^2 - (\gamma-1)]M_\infty^2\beta_0^2}{(M_\infty^2\beta_0^2 - 1)[(4\gamma-2)M_\infty^4\beta_0^4 + (\gamma+5)M_\infty^2\beta_0^2 - (\gamma-1)]} F'(0)\,F''(0), \\ \left(\frac{R_c}{R_0}\right)_{x=0} = \frac{2}{(\gamma+1)^2} \frac{(4\gamma-2)M_\infty^4\beta_0^4 + (\gamma+5)M_\infty^2\beta_0^2 - (\gamma-1)}{(M_\infty^2\beta_0^2 - 1)M_\infty^2\beta_0^2}. \end{cases} \tag{58}$$

Une seconde application, relative à un écoulement non stationnaire, est intéressante. L'obstacle est un dièdre qui est supposé exécuter de légères oscillations de déformation :

$$z = \theta_0\left[x + \varepsilon e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}\right]. \tag{59}$$

Les formules (47) (48) donnent

$$\bar{X}(\zeta, T_0) = \frac{1}{n} e^{i\omega T_0} \sum_{K=0}^{\infty} (-\frac{m}{n})^K e^{i\omega b(\frac{1}{U_\infty} - \frac{1}{c})(\frac{b}{a})^K \zeta}, \tag{60}$$

et la formule (46) permet ensuite d'obtenir $\bar{Y}(\xi, \eta, T_0)$, et par suite toutes grandeurs désirées. Mais, soient p_0, ρ_0, a_0, w_0, la pression, la masse spécifique, la célérité du son, la composante normale de la vitesse sur le dièdre non déformé, et soient

$$\begin{cases} p = p_0 + \varepsilon\bar{p}, \\ w = w_0 + \varepsilon\bar{w}, \end{cases} \tag{61}$$

la pression et la composante normale de la vitesse sur le dièdre déformé. L'expression la plus intéressante à considérer est :

$$\pi = \frac{\bar{p}}{\rho_0 a_0 \bar{w}}. \tag{62}$$

En effet, conformément à la théorie du piston, avancée pour la première fois par LIGHTHILL [36 a], approfondie par LANDAHL [32] et récemment étendue aux écoulements hypersoniques par MILES [39], tout écoulement non stationnaire sur un profil mince animé de faibles oscillations de déformation pourrait être, selon MILES, traité en faisant $\pi \cong 1$ dans la relation (62). Bien entendu, cette méthode proposée par MILES déborde largement le cadre du calcul actuel, toutefois il est intéressant d'en tester la validité dans le cas très particulier qui est considéré ici. Un calcul facile, faisant usage de (46) et (51), montre que, dans le cas le plus général, π est donné par la relation :

$$\pi = \frac{\frac{n}{b}\bar{X}'\left(\frac{\xi}{b}+\eta\right) - \frac{m}{a}\bar{X}'\left(\frac{\xi}{a}+\eta\right)}{\frac{n}{b}\bar{X}'\left(\frac{\xi}{b}+\eta\right) + \frac{m}{a}\bar{X}'\left(\frac{\xi}{a}+\eta\right)} + 0(\varepsilon). \tag{63}$$

La réponse au problème posé est évidemment obtenue en reportant (60) dans (63). Toutefois les formules données pour m, n, b et a dissimulent l'existence d'une interprétation fort simple pour la combinaison :

$$\kappa = \frac{m}{n}\frac{b^2}{a^2}\,. \tag{64}$$

Pour parvenir à l'interprétation cherchée il suffit d'appliquer la formule (63) à la situation qui est celle de l'application précédente. Il est clair alors que l'on a, en désignant par t le vecteur unitaire tangent au profil :

$$\frac{1}{\rho_0 a_0}\left(\frac{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}p}{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}w}\right)_{x=0} = \pi_0 = \frac{1-\kappa_0}{1+\kappa_0}. \tag{65}$$

En anticipant sur le chapitre II, et en particulier sur la formule (2.20) du chapitre en question, il est clair, d'après (65) que κ s'identifie avec le facteur de réflexion de EGGERS et SYVERTSON [10], ce qui assure que :

$$\kappa \ll 1. \tag{66}$$

D'ailleurs la courbe de la figure 9 donne les valeurs de κ et $\frac{a}{b}\kappa$. En établissant que, compte

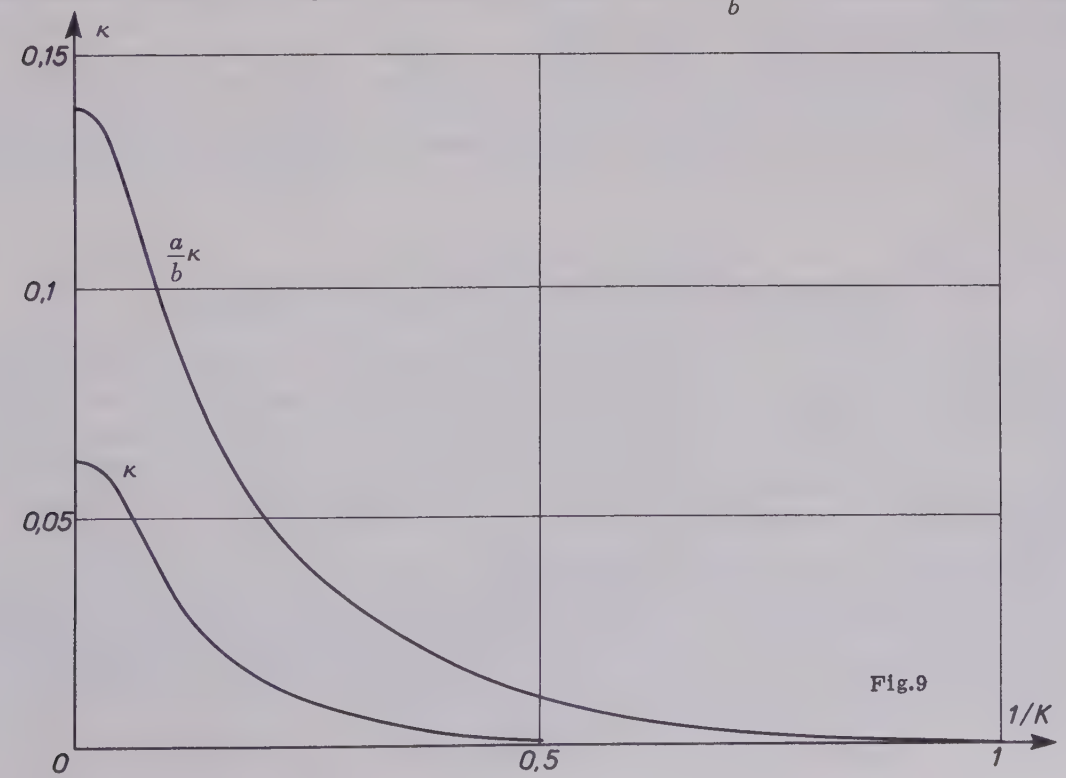


Fig.9

tenu de (41) et (43), ainsi que de (38), la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{m}{n}\frac{b^2}{a^2} = \frac{1-A}{1+A}\,\frac{1-\dfrac{2M_\infty^2\beta_0^2}{M_\infty^2\beta_0^2+1}A}{1+\dfrac{2M_\infty^2\beta_0^2}{M_\infty^2\beta_0^2+1}A}, \tag{67}$$

et en effectuant le passage à la limite de la théorie des petites perturbations sur l'expression η^* donnée par la formule (2.54) du chapitre II, le lecteur pourra se convaincre par le calcul de l'identité de κ et η^*.

Il suffit maintenant de substituer (60) dans (63) pour obtenir la valeur de π dans le cas du dièdre effectuant des oscillations de déformation de très faible amplitude :

$$(\pi)\ \text{dièdre oscillant} = \frac{1-\dfrac{a}{b}\kappa\,\dfrac{\displaystyle\sum_{K=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\kappa\right)^K e^{i\omega b\left(\frac{1}{U_\infty}\frac{1}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^K\left(\frac{\xi}{b}+\eta\right)}}{\displaystyle\sum_{K=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\kappa\right)^K e^{i\omega b\left(\frac{1}{U_\infty}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^K\left(\frac{\xi}{a}+\eta\right)}}}{1+\dfrac{a}{b}\kappa\,\dfrac{\displaystyle\sum_{K=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\kappa\right)^K e^{i\omega b\left(\frac{1}{U_\infty}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^K\left(\frac{\xi}{a}+\eta\right)}}{\displaystyle\sum_{K=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}\kappa\right)^K e^{i\omega b\left(\frac{1}{U_\infty}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^K\left(\frac{\xi}{b}+\eta\right)}}} \tag{68}$$

et en se reportant à la figure 10, l'on se rend compte que l'approximation proposée par MILES :

$$\pi \cong 1 \tag{69}$$

est tout à fait raisonnable dans ce cas du dièdre.

Les méthodes développées dans cette section se laissent étendre au cas où le dièdre de base n'est pas d'ouverture infiniment petite [16] [17], mais comme l'on a essentiellement en vue dans ce travail la théorie des petites perturbations, cette extension ne sera pas discutée ici.

I,3. INDICATIONS SUR L'APPROXIMATION NEWTONIENNE.

On a vu, à la fin du §1, qu'il était légitime de considérer des écoulements hypersoniques pour lesquels le paramètre k est très supérieur à l'unité. Il paraît intéressant de développer la théorie des petites perturbations lorsque $k = \infty$ pour deux raisons. D'une part ce cas donne une valeur limite qui peut donner des indications relatives au cas où k est assez grand – en fait l'erreur est $0(1/k^2)$ –; d'autre part on verra au cours du chapitre III que le cas $k = \infty$ est en lui-même spécialement intéressant.

Dans ce qui suit nous allons donc développer la théorie hypersonique des petites perturbations lorsque le paramètre de similitude hypersonique est infini, pour des écoulements bidimensionnels sur des profils plans ou des ogives de révolution. Nous disposons pour traiter ce problème d'une méthode puissante qui consiste à rechercher des développements asymptotiques procédant selon les puissances du paramètre :

$$\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \tag{1}$$

Pour se convaincre de cette possibilité il suffit de considérer le problème du dièdre

(2) $$y = \theta x \qquad \theta \ll 1$$

avec une onde de choc attachée

(3) $$y = \beta x \qquad \beta \ll 1.$$

L'angle β est donné par la formule

(4) $$\frac{\beta - \theta}{\beta} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{1}{M_\infty^2 \beta^2}.$$

Dans le cas considéré ici $M_\infty \beta = \infty$ et par suite (4) se réduit à

(5) $$\frac{\beta - \theta}{\beta} = \lambda,$$

d'où l'on déduit le développement

(6) $$\beta = \theta\left\{1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots\right\}.$$

Considérons donc un obstacle d'équation

(7) $$z = \tau c\, f\left(\frac{x}{c}\right)$$

avec une onde de choc correspondante :

(8) $$z = \tau c\, g\left(\frac{x}{c}\right);$$

nous cherchons à obtenir les fonctions $p^*(\bar{x}, \bar{z}; \gamma, \infty)$, ... des formules (1.63) lorsque k est infini. En se reportant au §1 et plus spécialement aux équations (55) (56) (57) (61) (62) (63), l'on voit qu'il s'agit de résoudre le problème aux limites suivant. Trouver les fonctions $p^*(\bar{x}, \bar{z}; \gamma)$, $g(\bar{x})$, $\rho^*(\bar{x}, \bar{z}; \gamma)$, $w^*(\bar{x}, \bar{z}; \gamma)$, .. qui vérifient les équations aux dérivées partielles :

(9)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho^*}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \rho^* w^*}{\partial \bar{z}} = 0, & a) \\ \dfrac{\partial w^*}{\partial \bar{x}} + w^* \dfrac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} + \dfrac{1}{\rho^*} \dfrac{\partial p^*}{\partial \bar{z}} = 0, & b) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} + w^* \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)(p^* \rho^{* -\gamma}) = 0, & c) \end{cases}$$

et les conditions aux limites :

(10) $$w^*\left(\bar{x}, f(\bar{x})\right) = f'(\bar{x}),$$

(11)
$$\begin{cases} p^*[\bar{x}, g(\bar{x})] = \dfrac{2}{\gamma + 1} g'^2(\bar{x}), & a) \\ \rho^*[\bar{x}, g(\bar{x})] = \dfrac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, & b) \\ w^*[(\bar{x}, g(\bar{x})] = \dfrac{2}{\gamma + 1} g'(\bar{x}). & c) \end{cases}$$

La solution de ce problème aux limites est recherchée par une méthode de développement asymptotique en $\lambda = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. On pourrait appliquer une méthode de développement systématique en substituant dans les équations (9) (10) (11), mais il est préférable de rechercher au préalable des formules de représentation susceptibles d'être substituées aux équations (9).

D'après (6), la couche de choc a une épaisseur qui est $0(\lambda)$ relativement à l'épaisseur de l'obstacle, il est donc indiqué de représenter les lignes de courant, $\xi = C^{te}$, sous la forme :

(12) $$\bar{z} = F(\bar{x}, \bar{\xi}; \gamma) = f(\bar{x}) + \lambda Z(\bar{x}, \bar{\xi}; \gamma),$$

la fonction Z tendant vers une limite finie lorsque $\gamma \to 1$ et, corrélativement, $\lambda \to 0$. Une ligne de courant est caractérisée dans la formule précédente par $\xi = C^{te}$. L'équation de conservation de la masse (9 *a*) peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \rho^*[\bar{x}, F(\bar{x}, \bar{\xi})] \frac{\partial}{\partial \xi} [F(\bar{x}, \bar{\xi})] \right\} = 0. \tag{13}$$

Il est d'ailleurs bien connu que si l'on veut traiter simultanément les écoulements plans et les écoulements de révolution il suffit de remplacer (13) par

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\rho^* F^{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}} \right) = 0 \tag{14}$$

avec

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ écoulement plan,} \\ 1, \text{ écoulement de révolution.} \end{cases} \tag{15}$$

Dans ce qui suit, nous considèrerons donc simultanément les deux types d'écoulements. D'après (11 *b*), ρ^* est $0(1/\lambda)$ d'où il résulte que (12) est bien compatible avec (14).

Un calcul direct permet de se rendre compte que l'équation (9 *b*) est équivalente à la suivante :

$$\frac{\partial p^*}{\partial \bar{\xi}} = -\rho^* \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}^2}. \tag{16}$$

Mais on peut également s'en convaincre comme suit : la variation de pression normalement aux lignes de courant est donnée par $dp = \rho q^2 \tau \, cdF / R \cos \theta$, si q est le module du vecteur vitesse, θ l'inclinaison de la ligne de courant et R son rayon de courbure. En théorie des petites perturbations

$$q \cong U_\infty, \quad \frac{c}{R} \cong -\tau \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}^2}, \quad \cos \theta \cong 1,$$

d'où résulte (16).

Lorsque l'on tient compte de la condition (11 *a*), et si l'on choisit la variable $\bar{\xi}$ de manière que $\bar{\xi} = \bar{x}$ sur l'onde de choc :

$$F(\bar{x}, \bar{x}) = g(\bar{x}), \tag{17}$$

(voir *fig. 10*), l'équation (16) permet d'écrire :

$$\tilde{p}(x, \xi) = \frac{2}{\gamma + 1} g'^2(x) + \int_{\xi}^{x} \frac{\partial^2 F(\bar{x}, \bar{\xi}_1)}{\partial \bar{x}^2} \tilde{\rho}(\bar{x}, \bar{\xi}_1) \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{\xi}_1)}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi}_1, \tag{18}$$

pourvu que l'on pose

$$\begin{cases} p^*\big(\bar{x}, F(\bar{x}, \bar{\xi})\big) = \tilde{p}(\bar{x}, \bar{\xi}), \\ \rho^*\big(\bar{x}, F(\bar{x}, \bar{\xi})\big) = \tilde{\rho}(\bar{x}, \bar{\xi}). \end{cases} \tag{19}$$

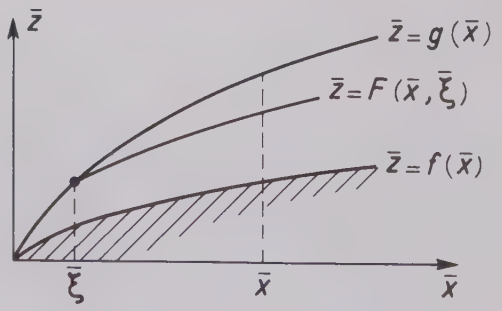


Fig.10

L'équation (14) montre que $\rho^* F^{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}}$ est indépendant de $\bar{x}$, l'on a donc en particulier

$$\tilde{\rho}(\bar{x}, \bar{\xi}) F^{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{\xi}) \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} = \tilde{\rho}(\bar{\xi}, \bar{\xi}) g^{\varepsilon}(\bar{\xi}) \frac{\partial F(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}}. \tag{20}$$

Mais, si l'on remarque que

$$w^*[\bar{\xi}, g(\bar{\xi})] = \frac{\partial F(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{\partial x},$$

les conditions (11 *b, c*) permettent d'établir, compte tenu de (17), la relation

$$\tilde{\rho}(\bar{\xi}, \bar{\xi}) \frac{\partial F(\bar{\xi}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} = g'(\bar{\xi}), \tag{21}$$

laquelle exprime d'ailleurs tout simplement la conservation de la masse, entre deux tubes de courant, à la traversée de l'onde de choc. De cette manière, l'équation (18), compte tenu de (19) et (20) devient

$$\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi}) = \frac{2}{\gamma+1} g'^2(\bar{x}) + \int_{\bar{\xi}}^{\bar{x}} \frac{\partial^2 F(\bar{x},\bar{\xi}_1)}{\partial \bar{x}^2} \left[\frac{g(\bar{\xi}_1)}{F(\bar{x},\bar{\xi}_1)}\right]^{\varepsilon} g'(\bar{\xi}_1) d\bar{\xi}_1 . \tag{22}$$

Nous avons ainsi une première formule de représentation qui combine les conditions aux limites (11) et l'équation aux dérivées partielles (9 *b*). Ce n'est pas une formule de solution car la fonction $F(\bar{x},\bar{\xi})$ est une inconnue du problème.

Il est pourtant possible de tirer dès maintenant un parti intéressant de cette formule (21). Relaxons la relation (1) entre γ et λ qui deviennent deux paramètres indépendants. Considérons F et $\tilde{p}$ comme des fonctions de $\bar{x}$, ξ; λ, γ, de sorte que la pression réduite s'exerçant effectivement sur l'obstacle est

$$\tilde{p}\left(\bar{x},\bar{\xi},\frac{\gamma-1}{\gamma+1},\gamma\right) = [\tilde{\bar{p}}(\bar{x},\bar{\xi};\lambda,\gamma)]_{\lambda=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \tag{23}$$

et de même pour F. Il est ainsi formellement légitime de rechercher $\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi};\lambda,\gamma)$ sous la forme :

$$\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi};\lambda,\gamma) = \tilde{p}_0(\bar{x},\bar{\xi};\gamma) + \lambda \tilde{p}_1(\bar{x},\bar{\xi};\gamma) + \cdots , \tag{24}$$

et, de manière analogue

$$F(\bar{x},\bar{\xi};\lambda,\gamma) = f(\bar{x}) + \lambda F_1(\bar{x},\bar{\xi};\gamma) + \cdots . \tag{25}$$

Dans ces conditions il est clair que la formule (22) donne immédiatement :

$$\tilde{p}_0(\bar{x},\bar{\xi};\gamma) = \frac{2}{\gamma+1} f'^2(\bar{x}) + \frac{f(\bar{x}) f''(\bar{x})}{1+\varepsilon}\left\{1 - \left[\frac{f(\bar{\xi})}{f(\bar{x})}\right]^{\varepsilon}\right\}. \tag{26}$$

Si l'obstacle comporte une pointe, la pression à sa surface est obtenue en faisant $\xi = 0$, $g(0) = 0$; il vient ainsi :

$$\tilde{p}(\bar{x};\lambda,\gamma) = \frac{2}{\gamma+1} f'^2(\bar{x}) + \frac{f(\bar{x}) f''(\bar{x})}{1+\varepsilon} + \lambda \tilde{p}_1(\bar{x};\gamma) + \cdots . \tag{27}$$

On donne le nom de l'écoulement newtonien à l'écoulement hypersonique —avec $k = \infty$— d'un gaz pour lequel $\gamma = 1$; on a ainsi sur l'obstacle :

$$\tilde{p}_{\text{Newt.}}(\bar{x}) = \tilde{p}(\bar{x};0,1) = f'^2(\bar{x}) + \frac{f(\bar{x}) f''(\bar{x})}{1+\varepsilon}. \tag{28}$$

Lorsque $\gamma - 1$ est petit mais non très petit, on peut gagner sensiblement en efficacité numérique si l'on adopte le schéma (24) (25), de préférence à un développement systématique en $(\gamma-1)/(\gamma+1)$. Pour obtenir les formules finales il suffit de faire $\lambda = (\gamma-1)/(\gamma+1)$ dans les développements qui ont été obtenus en supposant λ indépendant de γ.

Comme $F(\bar{x},\bar{\xi})$ figure dans la formule (22), il faut pour poursuivre, disposer d'une seconde formule de représentation pour $F(\bar{x},\bar{\xi})$. Cela est très simple, en combinant (20) et (21) il vient

$$\tilde{\rho}(\bar{x},\bar{\xi}) F^{\varepsilon}(\bar{x},\bar{\xi}) \frac{\partial F(\bar{x},\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} = [\bar{g}(\bar{\xi})]^{\varepsilon} g'(\bar{\xi}); \tag{29}$$

d'autre part (9 *c*) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\tilde{p}\, \tilde{\rho}^{-\gamma}) = 0, \tag{30}$$

de sorte que, compte tenu de (11), il vient

$$\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi})[\tilde{\rho}(\bar{x},\bar{\xi})]^{-\gamma} = \lambda^{\gamma} \frac{2}{\gamma+1} g'^2(\bar{\xi}) \tag{31}$$

et, en reportant (31) dans (29), en intégrant, et en faisant usage de (17) l'on obtient :

$$F(\bar{x},\bar{\xi}) = \left\{ [g(\bar{x})]^{1+\varepsilon} - \lambda(1+\varepsilon) \int_{\bar{\xi}}^{\bar{x}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \frac{g'^2(\bar{\xi}_1)}{\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi}_1)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} g^{\varepsilon}(\bar{\xi}_1) dg(\bar{\xi}_1) \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \tag{32}$$

La formule précédente fait jouer un rôle spécial à $g(\bar{x})$, on peut obtenir une autre formule en faisant jouer un rôle analogue à $f(\bar{x})$; il suffit de noter que la condition (10) entraîne :

$$F(\bar{x},0) = f(\bar{x}), \tag{33}$$

de sorte qu'il vient

$$F(\bar{x},\bar{\xi}) = \left\{ [f(\bar{x})]^{1+\varepsilon} + \lambda(1+\varepsilon) \int_{0}^{\bar{\xi}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \frac{g'^2(\bar{\xi}_1)}{\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi}_1)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} g^{\varepsilon}(\bar{\xi}_1) dg(\bar{\xi}_1) \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \tag{34}$$

mais il faut alors ajouter la relation

$$g(\bar{x}) = F(\bar{x},\bar{x}) = \left\{ [f(\bar{x})]^{1+\varepsilon} + \lambda(1+\varepsilon) \int_{0}^{\bar{x}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \frac{g'^2(\bar{\xi}_1)}{\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi}_1)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} g^{\varepsilon}(\bar{\xi}_1) dg(\bar{\xi}_1) \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \tag{35}$$

Avec les formules de représentation (22) et (32) ou (34) on peut envisager l'étude de divers problèmes aux limites. Ainsi la détermination de l'écoulement hypersonique sur l'obstacle (7) (avec $f(0) = 0$, $0 < f'(0) < +\infty$), lorsque $f(x)$ est deux fois continuement dérivable, se ramène au

PROBLÈME 1 - Déterminer une fonction de une variable $g(\bar{x})$ et deux fonctions de deux variables $F(\bar{x},\bar{\xi})$ et $\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi})$ qui vérifient les relations :

$$\begin{cases} g(\bar{x}) = F(\bar{x},\bar{x}), \\ F(\bar{x},\bar{\xi}) = \left\{ [f(\bar{x})]^{1+\varepsilon} + \lambda(1+\varepsilon) \int_{0}^{\bar{\xi}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \frac{g'^2(\bar{\xi}_1)}{\tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi}_1)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} g^{\varepsilon}(\bar{\xi}_1) dg(\bar{\xi}_1) \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ \tilde{p}(\bar{x},\bar{\xi}) = \frac{2}{\gamma+1} g'^2(\bar{x}) + \int_{\bar{\xi}}^{\bar{x}} \frac{\partial^2 F(\bar{x},\bar{\xi}_1)}{\partial \bar{x}^2} \left[\frac{g(\bar{\xi}_1)}{F(\bar{x},\bar{\xi}_1)} \right]^{\varepsilon} dg(\bar{\xi}_1). \end{cases} \tag{36}$$

Il est clair que l'on peut essayer de construire formellement la solution de ce problème sous la forme des séries (24) (25) avec en outre

$$g(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda F_1(\bar{x},\bar{\xi};\gamma) + \cdots \tag{37}$$

en substituant dans (36) l'on obtient manifestement des formules de solution pour les Fi et $\tilde{p}_i$. Si la fonction $f(\bar{x})$ est indéfiniment dérivable on ne sera jamais arrêté dans le calcul des termes successifs pourvu que

$$\frac{2}{\gamma+1} g'^2 + \frac{gg''}{1+\varepsilon} > 0. \tag{38}$$

Nous disposons donc d'un procédé formel permettant d'aborder l'étude des écoulements hypersoniques – avec paramètre de similitude infini –. Ce procédé est intéressant car il permet de traiter d'autres problèmes aux limites. Il se peut, par exemple que la forme de l'obstacle ne soit pas connue, mais que l'on désire déterminer celui-ci de manière qu'une relation fonctionnelle avec $f(\bar{x})$ et $\tilde{p}(\bar{x})$ soit réalisée à la surface. Par exemple :

$$\mathcal{F}[f(\bar{x}), \tilde{p}(\bar{x},o)] = 0. \tag{39}$$

On est alors conduit à poser le

PROBLÈME 2 - Déterminer une fonction de une variable $f(\bar{x})$ et deux fonctions de deux variables

$\tilde{p}(\bar{x}, \bar{\xi})$ *et* $F(\bar{x}, \bar{\xi})$ *qui vérifient les relations :*

$$(40)\quad \begin{cases} F(\bar{x}, \bar{\xi}) = \left\{ [f(\bar{x})]^{1+\varepsilon} + \lambda(1+\varepsilon) \displaystyle\int_0^{\bar{\xi}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{dF(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_1)}{d\bar{\xi}_1} \right)^2 \Big/ \tilde{p}(\bar{x}, \bar{\xi}_1) \right]^{\frac{1}{\gamma}} F^{\varepsilon}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_1) dF(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_1) \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ \tilde{p}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \dfrac{2}{\gamma+1} \left[\dfrac{d}{d\bar{x}} F(\bar{x}, \bar{x}) \right]^2 + \displaystyle\int_{\bar{\xi}}^{\bar{x}} \frac{\partial^2 F(\bar{x}, \bar{\xi}_1)}{\partial \bar{x}^2} \left[\frac{F(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_1)}{F(\bar{x}, \bar{\xi}_1)} \right]^{\varepsilon} dF(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_1), \end{cases}$$

Si l'on sait résoudre l'équation fonctionnelle

$$(41)\quad F\left\{ f_0(\bar{x}), \frac{2}{\gamma+1} f_0'^2(\bar{x}) + \frac{f_0(\bar{x})\, f_0''(\bar{x})}{1+\varepsilon} \right\} = 0,$$

on pourra essayer d'aborder le problème précédent en faisant usage des développements (24) (25) et de

$$(42)\quad f(\bar{x}) = f_0(\bar{x}; \gamma) + \lambda f_1(\bar{x}; \gamma) + \cdots .$$

Lorsque les divers problèmes du type précédent, que l'on pourra être amené à poser, auront été formellement résolus sous forme de développements asymptotiques, l'on aura, par simple substitution la solution du problème physique initial. Ainsi, si l'obstacle (7) est donné, il suffira de faire $\lambda = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$ dans les formules :

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{p\left(\frac{x}{c}, \frac{z}{c}\right)}{\gamma p_\infty M_\infty^2 \tau^2} = \tilde{p}\left(\dfrac{x}{c}, \dfrac{\xi}{c}; \lambda, \gamma\right) \\ \dfrac{\rho\left(\frac{x}{c}, \frac{z}{c}\right)}{\rho_\infty} = \dfrac{1}{\lambda} \left(\dfrac{\gamma+1}{2} \dfrac{\tilde{p}\left(\frac{x}{c}\, \frac{\xi}{c}; \lambda, \gamma\right)}{\left\{ \frac{d}{d\xi} \left[F\left(\frac{\xi}{c}\, \frac{\xi}{c}; \lambda, \gamma\right) \right] \right\}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ w\left(\dfrac{x}{c}, \dfrac{z}{c}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ F\left(\dfrac{x}{c}\, \dfrac{\xi}{c}; \lambda, \gamma\right) \right\} \\ z = \tau c\, F\left(\dfrac{x}{c}\, \dfrac{\xi}{c}; \lambda, \gamma\right). \end{cases}$$

On aura obtenu de cette manière une approximation qui sera d'autant meilleure que l'on aura retenu plus de termes dans les développements en λ, sous réserve que soit vérifiée en tous points la condition :

$$(44)\quad M_\infty^2 \tau^2 \left(\frac{2}{\gamma+1} f'^2 + \frac{1}{1+\varepsilon} f f'' \right) \gg 1.$$

Cette condition est extrêmement sévère, elle intervient pour limiter très sérieusement l'efficacité numérique de la méthode.

En écoulement newtonien, on a $\gamma = 1$, de sorte que la pression à la surface de l'obstacle :

$$(45)\quad y = f(x),$$

est alors donnée par la formule

$$(46)\quad \frac{p_{\text{Newt.}}}{p_\infty} = M_\infty^2 \left(f'^2 + \frac{f f''}{1+\varepsilon} \right).$$

Cette formule sera utilisée dans le chapitre III § 3, à propos d'un problème directement lié au problème 2 précédent, pour lequel la relation fonctionnelle (39) est :

$$(47)\quad \mathcal{F}(f, \tilde{p}) = f \tilde{p}^{\frac{1}{\gamma}} - C^{te} = 0.$$

On se limitera dans le présent travail à l'approximation $\gamma = 1$.

Il n'est pas possible de terminer ce paragraphe sans attirer l'attention du lecteur non spécialement averti sur le fait que la méthode a une portée beaucoup plus générale que ne laisseraient prévoir les considérations ci-dessus. En premier lieu, $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ et $1/k^2$ jouent un rôle formellement analogue; il est possible d'effectuer un développement asymptotique double [7]; en second lieu, et cela est plus important, la méthode s'applique à de très nombreux écoulements hypersoniques qui ne relèvent pas de la théorie des petites perturbations [2 - 6 - 12 - 26]; enfin quelques écoulements tridimensionnels peuvent également être traités [18 - 19 - 33]. En se limitant à l'approximation $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, des formules fort simples peuvent être obtenues pour les efforts globaux s'exerçant sur des obstacles de révolution attaqués, sous faible incidence par un écoulement hypersonique [18]; mais toutes ces considérations débordent le cadre de la présente publication.

Note ajoutée à la correction des épreuves. Les questions traitées dans le §I.2 ont été aussi examinées dans le livre de CHERNYI (Ecoulements d'un gaz aux grandes vitesses supersoniques - FIZMATTIZ - Moscou 1959) dont l'auteur n'a eu connaissance qu'après la rédaction de la présente publication.

CHAPITRE II

SUR LA MÉTHODE DE CHOC-DÉTENTE

II,1. INTRODUCTION

L'étude de l'écoulement hypersonique d'un fluide parfait derrière l'onde de choc attachée à la pointe d'un profil plan relève en principe de la méthode numérique des caractéristiques. Mais cette dernière méthode est d'une mise en œuvre si compliquée qu'il est fort utile de développer des méthodes approchées plus expéditives conduisant, autant que possible, à des formules explicites. Le présent chapitre est consacré à l'étude détaillée d'une de ces méthodes. La méthode de choc détente, qui consiste à négliger les ondes de pression transportées par les lignes de Mach descendantes, fut utilisée pour la première fois par EPSTEIN [28] pour calculer la pression sur un obstacle à contour polygonal; d'ailleurs il n'y avait là aucune approximation. Les ondes de pression transportées par les lignes de Mach descendantes étant négligées, la relation entre la pression et l'angle d'inclinaison de la tangente à l'obstacle est la même que dans une détente de PRANDTL-MEYER. Il en résulte un procédé fort simple pour calculer la pression en tout point de l'obstacle, et, par voie de conséquence, les efforts globaux.

L'utilisation de la méthode de choc-détente, comme méthode approchée, a été proposée pour la première fois par M. Maurice ROY [42], à propos du calcul de la résistance des corps fuselés.

Ce n'est que récemment, à propos des écoulements hypersoniques, que la méthode de choc-détente a été étendue, pour ainsi dire, dans tout le champ de l'écoulement. EGGERS et SYVERTSON [10], remarquant que si la relation de PRANDTL-MEYER est approximativement vérifiée sur l'obstacle, elle doit également l'être sur toute ligne de courant, parviennent à édifier un procédé numérique de construction de tout l'écoulement par couches successives. Ces auteurs ont également donné une première justification de la méthode en montrant que l'onde de choc de tête absorbe à peu près intégralement les ondes de pression issues du profil qui sont transportées par les lignes de Mach montantes. Le fait que l'onde de choc de tête ne renvoie que très faiblement des ondes de pression vers le profil, aide à comprendre la raison du succès de la méthode de choc-détente, mais n'est pas, en soi, une explication suffisante. En effet, en raison du gradient d'entropie qui règne dans l'écoulement, chaque ligne de courant agit comme un réflecteur d'ondes élémentaires. Il y a donc, dans l'écoulement, deux sources génératrices d'ondes de pression descendantes : l'onde de choc, dont l'importance a été reconnue être très faible, et également la rotationalité de l'écoulement. Cette seconde source a été étudiée par MAHONY [37], MEYER [38], WALDMAN et PROBSTEIN [50]. Les théories développées par ces auteurs sont essentiellement des théories du premier ordre par rapport à la théorie de FRIEDRICHS [13], dans laquelle le

caractère rotationnel de l'écoulement est complètement négligé. Or, comme ce qui caractérise les écoulements hypersoniques, c'est essentiellement l'intervention de gradients d'entropie importants, et, par voie de conséquence, une forte valeur du tourbillon, les théories mentionnées ne peuvent pas être réellement considérées comme hypersoniques.

Dans le présent chapitre, cette question est reprise en suivant du plus près qu'il est possible l'analyse initiale de EGGERS et SYVERTSON [20]. Ces auteurs ont introduit le paramètre suivant :

$$\eta = \frac{\textit{intensité des ondes de pression descendantes}}{\textit{intensité des ondes de pression montantes}}, \tag{1}$$

et après avoir montré que $\eta \ll 1$ sur l'onde de choc ils ont admis que la même propriété était vraie dans tout l'écoulement. Nous nous proposons ici d'obtenir une formule de représentation pour η, valable dans tout le champ de l'écoulement, ceci dans un double but. D'une part, la formule obtenue mettra parfaitement bien en évidence l'influence des deux sources génératrices d'ondes de pression descendantes et permettra, sinon de justifier quantitativement, du moins de comprendre les raisons théoriques du succès de la méthode de choc-détente. Aussi bien d'ailleurs la justification quantitative de la méthode est-elle assurée, sur une base empirique, par les nombreux calculs [9] qui ont été effectués simultanément par la méthode de choc-détente et par la méthode numérique des caractéristiques. D'un autre côté, la formule de représentation obtenue pour le paramètre η, permet de construire un schéma formel d'approximations successives dont la première étape, caractérisée par $\eta = 0$, peut être considérée comme la formulation analytique la plus rationnelle de la méthode de choc-détente.

Le principe de construction du schéma d'approximations successives est le suivant. Imaginons que l'on ait formé un système de formules de représentation complètement équivalent aux équations du mouvement et aux conditions aux limites, et que dans ce système figure précisément la formule de représentation relative à η dont il a été question. Désignons alors symboliquement par $\mathcal{E}$ l'écoulement et par $\mathcal{P}$ le profil; $\mathcal{R}$ désignant symboliquement un système de formules de représentation, l'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{R}(\mathcal{P}, \eta), & a) \\ \eta = \mathcal{F}(\mathcal{E}, \eta), & b) \end{cases} \tag{2}$$

système équivalent aux équations du mouvement et aux diverses conditions aux limites. Nous posons alors :

$$\begin{cases} \eta_0 = 0, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{R}(\mathcal{P}, 0), & a) \\ \mathcal{E}_n = \mathcal{R}(\mathcal{P}, \eta_{n-1}), & b) \\ \eta_n = \mathcal{F}(\mathcal{E}_n, \eta_{n-1}), & c) \end{cases} \tag{3}$$

et nous disons que $\mathcal{E}_0$ définit la représentation analytique d'un écoulement construit par la méthode de choc-détente suivant le procédé numérique de EGGERS et SYVERTSON. Naturellement, en calculant η_1 et en vérifiant que $\eta_1 \ll 1$, l'on obtiendrait une justification quantitative de la méthode et, éventuellement, le moyen d'obtenir une correction. Rien de général, ne sera ici tenté dans cette voie. En effet, en dehors de l'intérêt que présente le rattachement de toute méthode approchée à un procédé systématique, même si ce procédé est largement formel, l'intérêt de la théorie présentée ici paraît résider, moins dans une justification quantitative, déjà acquise empiriquement par ailleurs, que dans les deux points suivants. En premier lieu, comme cela se verra par la suite, la formule (2 *b*) est fort instructive et constitue le complément tout naturel de l'analyse de EGGERS et SYVERTSON, relative au facteur de réflexion η évalué sur l'onde de choc. En second lieu, une formulation analytique telle que (2 *a*), même si elle n'est pas entièrement explicite dans le cas général – rappelons que $\mathcal{R}$ désigne symboliquement un système de formules de représentation – présente un intérêt indiscutable.

De ce dernier point de vue, la structure de :

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{R}(\mathcal{P}, 0), \tag{4}$$

est, en elle-même, remarquable. On sait en effet que la construction de tout écoulement supersonique plan irrotationnel revient à la résolution de deux problèmes complètement distincts : d'une part, construction de l'écoulement dans le plan de l'hodographe, d'autre part reconstitution du plan physique. Or il se trouve que le même phénomène se produit à propos de (4). Toutefois, ce n'est pas ici le plan de l'hodographe qui intervient mais un plan (β, S) pour lequel les lignes de coordonnées sont les lignes de courant ($S = C^{te}$) et les lignes de Mach montantes ($\beta = C^{te}$). Ainsi, la construction de l'écoulement suivant (4) est-elle dissociée en deux problèmes distincts : construction de l'écoulement dans le plan (β, S), puis reconstitution du plan physique.

Une réserve vient d'être formulée il y a un instant en signalant que (4) n'est pas entièrement explicite. Les difficultés ne proviennent pas du second problème - restitution du plan physique -, dont la solution dépend seulement de la résolution d'une équation intégrale de VOLTERRA. Les difficultés proviennent du premier problème - construction de l'écoulement dans le plan (β, S) - et, plus précisément, du fait que dans les formules de représentation (4) il intervient le facteur de réflexion des ondes montantes sur les lignes de courant :

$$G = \frac{\gamma - 1 + 2\sin^2\mu}{4\gamma(\gamma-1)c_v\cos^2\mu}\cos(2\mu), \tag{5}$$

où $\mu = \text{Arsin}(1/M)$ désigne l'angle de Mach local. La valeur de G dépendant de la solution du problème, il en résulte que le premier problème n'est pas susceptible d'une solution explicite. Toutefois, en se plaçant en théorie hypersonique des petites perturbations, il faut remplacer G par :

$$\overline{G} = \frac{1}{4\gamma c_v}, \tag{6}$$

qui est une constante. Il en résulte que les formules (4) relatives au premier problème sont ici des formules de solution.

Ainsi, dans la mesure où la solution d'une équation intégrale de VOLTERRA peut être considérée comme explicite, l'on peut dire que la méthode de choc-détente est susceptible, en théorie hypersonique des petites perturbations, d'une représentation analytique complètement explicite. Toutefois, du point de vue des applications, c'est encore un lourd handicap que d'être tributaire de la solution d'une équation de VOLTERRA; aussi est-il particulièrement intéressant de pouvoir obtenir une solution approchée simple de cette équation, même au prix d'approximations supplémentaires, surtout si ces dernières sont parfaitement cohérentes avec les approximations faites par ailleurs. Moyennant de telles approximations il est effectivement possible de ramener aux quadratures la détermination de l'onde de choc attachée à la pointe d'un profil mince.

Après ces quelques généralités, et avant de passer à un exposé systématique de la théorie, nous allons maintenant nous efforcer de présenter celle-ci de la manière la plus intuitive possible.

Il est bien connu que les équations des écoulements supersoniques sont hyperboliques, et que l'on peut leur associer trois directions caractéristiques, qui sont celles des lignes de courant et des deux familles de lignes de Mach : lignes de Mach montantes et lignes de Mach descendantes. Physiquement, cela signifie que l'écoulement résulte de la superposition - non linéaire - d'un triple phénomène de propagation par ondes dont les rayons de propagation sont respectivement les lignes de courant et les deux familles de lignes de Mach.

Ce phénomène de propagation est analysé sur la figure 1, qui montre - séparées - trois ondes élémentaires. Une onde est un pinceau de courbes caractéristiques, ou rayons de propagation, qui transporte une variation de certains paramètres de l'écoulement. Ces ondes sont supposées élémentaires en ce sens que les variations qu'elles transportent sont supposées infinitésimales. Les ondes, dont les lignes de courant sont les rayons de propagation, transportent des variations d'entropie ΔS. Les ondes, dont les lignes de Mach montantes (C_+)

(respectivement descendantes (C_-)) sont les rayons de propagation, transportant des variations de pression $\Delta_+ p$ (respectivement $\Delta_- p$) et de l'angle d'inclinaison du vecteur vitesse $\Delta_+ \theta$ (respectivement $\Delta_- \theta$). Les lois de propagation sont les suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta S = C^{te}, & a) \\ \Delta_+ p = \dfrac{2\gamma p}{\sin 2\mu}\, \Delta_+ \theta, & b) \\ \Delta_- p = \dfrac{-2\gamma p}{\sin 2\mu}\, \Delta_- \theta. & c) \end{cases}$$

Il a été signalé que l'écoulement résultait de la superposition d'un triple phénomène de propagation. Le sens à donner à cette expression est le suivant. Soient, figure 2, M' et M'' deux points voisins de l'écoulement, considérons les trois pinceaux de lignes de courant et

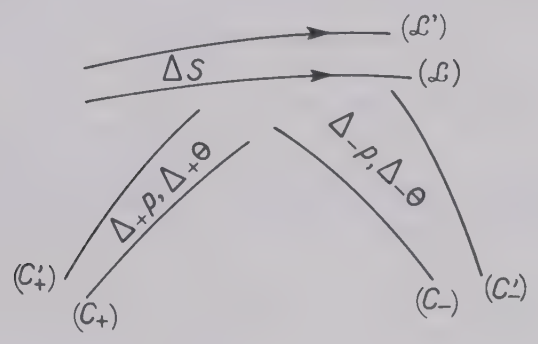


Fig.1 - Le triple système d'ondes.

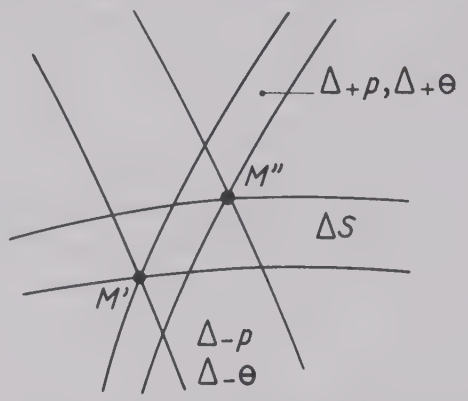


Fig.2 - Relation géométrique entre l'extension relative des trois systèmes d'ondes.

de lignes de Mach des deux familles s'appuyant sur le segment $M'M''$. Soient ΔS, $\Delta_\pm p$ et $\Delta_\pm \theta$ les "ondes" correspondantes, au point M milieu de $M'M''$, l'on a :

$$(8) \qquad \begin{cases} S(M'') - S(M') = \Delta S, & a) \\ p(M'') - p(M') = \Delta_+ p + \Delta_- p, & b) \\ \theta(M'') - \theta(M') = \Delta_+ \theta + \Delta_- \theta. & c) \end{cases}$$

Les formules précédentes expliquent l'origine du terme superposition. La qualification de non linéarité provenant de ce que la superposition en question est purement locale.

Il ne faut pas perdre de vue que, mises à part les ondes d'entropie, l'intensité d'une onde est variable d'un point à un autre du rayon de propagation support de cette onde. La relation (7 *a*) est une véritable loi de propagation puisqu'elle permet de connaître l'intensité de l'onde d'entropie en un point quelconque du rayon de propagation lorsqu'est connue l'intensité de cette onde en un seul point du rayon de propagation. Il n'en est pas de même des relations (7 *b*- *c*) qui expriment seulement des relations entre les intensités des ondes de pression $\Delta_\pm p$ et les ondes de déviation $\Delta_\pm \theta$ en un même point du rayon de propagation. Il sera fort utile de savoir substituer à (7 *b*- *c*) de véritables lois de propagation. La seule cause de variation des ondes $\Delta_\pm \theta$ étant l'existence d'un gradient d'entropie normalement aux lignes de courant, il est tout naturel d'étudier la propagation de ces ondes à travers une discontinuité de contact, d'intensité infinitésimale δS. Avec les notations de la figure 3, la relation suivante est aisément établie :

$$(9) \qquad \frac{\delta_+(\Delta_+ \theta)}{\delta_+ S} = -\frac{\delta_-(\Delta_- \theta)}{\delta_- S} = G(\Delta_+ \theta - \Delta_- \theta),$$

G étant le facteur de réflexion, dont la valeur a déjà été donnée. Il faut remarquer ici que l'ouverture du pinceau de caractéristiques (C_+), qui porte $\Delta_+\theta$, et l'ouverture du pinceau de caractéristiques (C_-), qui porte $\Delta_-\theta$, sont assujetties à vérifier la condition géométrique suivante: le parallélogramme intersection des deux pinceaux en question doit avoir une diagonale portée par une ligne de courant. Mais il est clair, dans ces conditions, que le paramètre η de EGGERS et SYVERTSON est égal à :

$$\eta = \frac{\Delta_-\theta}{\Delta_+\theta}, \tag{10}$$

et, finalement, en passant d'une discontinuité de contact à une distribution continue d'entropie, la relation (9) donne les lois de propagations cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{d(\Delta_+\theta)}{dS} = G(1-\eta)\,\Delta_+\theta, & a) \\ \dfrac{d(\Delta_-\theta)}{dS} = -\,G(1-\eta)\,\Delta_+\theta. & b) \end{cases} \tag{11}$$

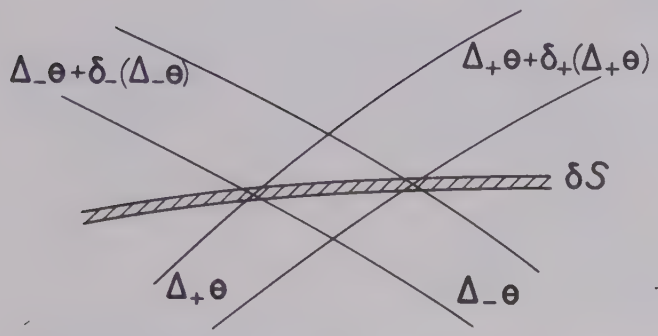


Fig.3 - Interaction des ondes angulaires avec les ondes d'entropie : effet élémentaire

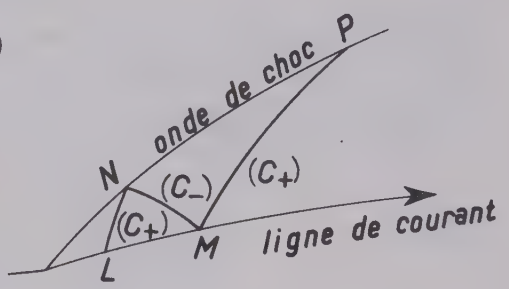


Fig.4

Considérons la situation représentée par la figure 4, en intégrant la relation (11 a) le long de MP, puis la relation (11 b) le long de MN, il est possible d'exprimer $(\Delta_+\theta)_M$ et $(\Delta_-\theta)_M$ à l'aide de $(\Delta_+\theta)_P$ et $(\Delta_-\theta)_N$, ainsi que d'intégrales curvilignes étendues aux arcs PM et MN. En reportant ces résultats dans (10) il vient une formule de représentation pour η qui se présente sous la forme suivante :

$$\eta = \frac{a\eta_1 - b\eta_2}{a+b}, \tag{12}$$

avec :

$$a = (\Delta_+\theta)_P, \qquad b = \int_P^M G(1-\eta)\,\Delta_+\theta\, dS, \tag{13}$$

$$\eta_1 = \frac{(\Delta_-\theta)_N}{(\Delta_+\theta)_P}, \qquad \eta_2 = \frac{\int_N^M G(1-\eta)\,\Delta_+\theta\, dS}{\int_P^M G(1-\eta)\Delta_+\theta\, dS}. \tag{14}$$

La relation (11 a) montre que $\Delta_+\theta$ garde un signe constant le long d'une caractéristique (C_+). Il en résulte que a et b sont de mêmes signes si G est positif, et par suite que η est compris entre η_1 et η_2. Soit $\eta(N)$ la valeur de η en N sur l'onde de choc, l'on a :

$$\eta_1(M) \cong \eta(N)\,\frac{(\Delta_+\theta)_N}{(\Delta_+\theta)_M}\,\exp\left\{\bar{G}\left[S(M)-S(P)\right]\right\} \tag{15}$$

en adoptant pour $\bar{G}$ une valeur moyenne de G. D'une manière analogue, Q désignant un point de la caractéristique MN l'on a :

$$\eta_2(M) = \frac{(\Delta_+\theta)_Q}{(\Delta_+\theta)_M}\,\frac{S(M)-S(N)}{S(M)-S(P)}\,\frac{\bar{G}[S(M)-S(P)]}{1-\exp\left(-\bar{G}\,[S(M)-S(P)]\right)}. \tag{16}$$

Tout est parfaitement clair dans les formules précédentes, sauf peut être les termes

$$\frac{(\Delta_+\theta)_N}{(\Delta_+\theta)_M} \quad \text{et} \quad \frac{(\Delta_+\theta)_Q}{(\Delta_+\theta)_M} .$$

La signification de $\Delta_+\theta$, pour une onde (C_+) bien déterminée, est quelque chose de clair ; il n'en est pas de même lorsque l'on se déplace le long d'une caractéristique (C_-). Reportons nous à la figure 5 sur laquelle ont été représentées deux ondes (C_+) et (C_-) issues de M, $(\Delta_+\theta)_M$ étant l'intensité de la première. La relation géométrique entre les deux ondes est celle qui a déjà été signalée, à savoir que le parallélogramme commun aux deux ondes doit avoir une diagonale portée par la ligne de courant. Ainsi, en tout point Q de MN, la condition géométrique signalée permet d'associer une onde (C_+) à l'onde (C_-) précédente issue de M. L'intensité de cette onde (C_+) est précisément ce qui a été noté $(\Delta_+\theta)_Q$ dans la relation (16).

Les notions introduites jusqu'ici ne sont pas suffisantes pour permettre une évaluation de

$$\frac{(\Delta_+\theta)_N}{(\Delta_+\theta)_M} \quad \text{et} \quad \frac{(\Delta_+\theta)_Q}{(\Delta_+\theta)_M} ,$$

il est seulement possible de dire que si la courbure du profil varie assez peu d'un point à l'autre de ce dernier, les rapports précédents peuvent être tenus pour étant de l'ordre de l'unité.

Ainsi, pour un profil dont la courbure varie lentement, deux conditions suffisantes pour la validité de la méthode de choc détente sont données par :

$$(17) \qquad \begin{cases} \eta(N)\,\exp\left\{\bar{G}[S(M)-S(P)]\right\} \ll 1, \\ \dfrac{S(M)-S(N)}{S(M)-S(P)}\,\dfrac{\bar{G}[S(M)-S(P)]}{1-\exp\left\{-\bar{G}[S(M)-S(P)]\right\}} \ll 1 . \end{cases}$$

Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que les conclusions précédentes peuvent être en défaut si l'obstacle présente des variations importantes de courbure.

A propos des conditions (17), l'on peut remarquer que (17 *a*) est une conséquence de la condition de EGGERS et SYVERTSON

$$(18) \qquad \eta(N) \ll 1$$

mais qu'il n'en est pas de même de (17 *b*). Cette dernière condition exige que les caractéristiques (C_+) soient beaucoup plus inclinées, sur l'onde de choc, que ne le sont les caractéristiques (C_-).

Une dernière remarque, si le nombre de Mach de l'écoulement est partout supérieur à 2, alors G est partout positif. Nous avons vu, dans ces conditions, que a et b sont de même signe, et la formule (12) montre alors que les deux sources génératrices d'ondes descendantes, à savoir réflexion sur l'onde de choc d'une part et réflexions élémentaires sur les lignes de courant d'autre part, agissent en sens inverse. Cela peut être une circonstance favorable à la méthode de choc-détente.

Après avoir obtenu la forme explicite de (2 *a*) et en avoir discuté les principales conséquences, il faut maintenant s'attacher à expliciter (4), c'est-à-dire la représentation analytique de la méthode de choc détente. Dorénavant, η est donc supposé nul.

Soit, comme indiqué sur la figure 6, un point M relié au profil par un segment MI de caractéristique (C_+). Ce rayon de propagation MI est le support d'une onde dont l'intensité est $(\Delta_+\theta)_I$ en I et $(\Delta_+\theta)_M$ en M; la relation suivante esd une conséquence de (11 *a*) :

$$(19) \qquad (\Delta_+\theta)_M = (\Delta_+\theta)_I \,\exp\left(\int_I^M G\,dS\right).$$

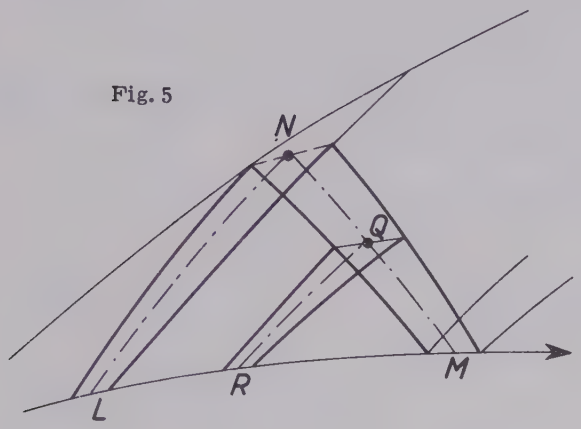
Sans que de longues explications soient nécessaires, il est clair que la formule précédente conduit tout naturellement à introduire le plan (β, S), dont il a déjà été question. La définition précise de β est la suivante : soit θ_o l'angle d'inclinaison de la tangente du profil à la pointe, l'on a :

(20) $$\theta_{\text{profil}} = \theta_o - \beta .$$

Il est clair que $(\Delta_+ \theta)_M = \Delta\beta \cdot \theta_\beta$, et que $(\Delta_+ \theta)_I = -\Delta\beta$. Dans ces conditions, soit (*fig.* 7)

(21) $$\beta = \beta^* = f(S),$$

Fig. 5



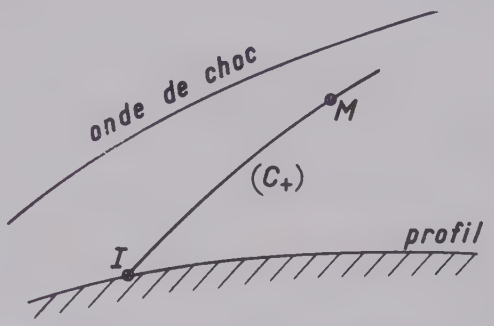
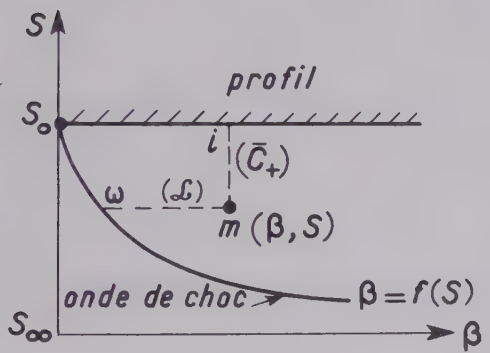


Fig.6 - Evolution des ondes angulaires sur les caractéristiques [e_-]



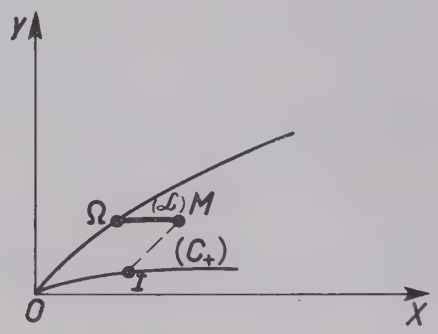


Fig.7 - Le plan (β, S); correspondance avec le plan physique.

la courbe image de l'onde de choc dans le plan (β, S); la convention suivante est désormais introduite : toute grandeur caractéristique de l'écoulement évaluée sur l'onde de choc sera affectée d'une astérisque en indice supérieur. Si S_o désigne l'entropie sur le profil, et après avoir posé :

(22) $$\mathcal{V}(\beta, S) = \exp\left(\int_{S_o}^{S} G(\beta, \Sigma)\, d\Sigma\right)$$

il est clair, d'après les explications précédentes, que (19) conduit à :

(23) $$\theta(\beta, S) = \theta^*(S) - \int_{f(S)}^{\beta} \mathcal{V}(\beta', S)\, d\beta'.$$

Pour achever de préciser toutes les grandeurs thermodynamiques de l'écoulement, il suffit de connaître le nombre de BUSEMANN :

(24) $$\nu = \mu + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\ \text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\ \text{cotg}\ \mu\right) - \pi/2.$$

Or, dans la méthode de choc détente, la relation entre ν et θ, le long d'une ligne de courant, étant la même que dans une détente de PRANDTL MEYER, le nombre de BUSEMANN est obtenu grâce à la relation :

$$\nu(\beta, S) = \nu^*(S) + \int_{f(S)}^{\beta} \mathcal{V}(\beta', S)\, d\beta'. \tag{25}$$

Maintenant, une condition sur $f(S)$ peut être obtenue en évaluant de deux manières la variation de θ^* le long de l'onde de choc. Désignons par δ le symbole d'une variation en suivant l'onde de choc. Puisque les ondes descendantes sont négligées, l'on a :

$$\delta\theta^* = (\Delta_+ \theta)^* = \theta^*_\beta\, \delta^*_\beta = \frac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\, \Delta_+ p^* = \frac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\, \delta p^*; \tag{26}$$

il suffit alors de remarquer que $\theta^*_\beta = -\mathcal{V}^*$, pour obtenir la relation :

$$\frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\Phi(S)\, \exp\left\{ \int_S^{S_0} G(f(S), \Sigma)\, d\Sigma \right\} = 0 \tag{27}$$

avec :

$$\Phi(S) = \frac{d\theta^*}{dS} + \frac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*} \frac{dp^*}{dS}. \tag{28}$$

La partie relative au premier problème – détermination de l'écoulement dans le plan (β, S) – du système de formules de représentation (4) est constituée par (22) (23) (25) (27). Il est clair que ces formules de représentation ne sont pas des formules de solution puisque la fonction G qui y figure dépend de la solution par l'intermédiaire de μ donc de ν. Mais il est clair également que, dans ce premier problème, le plan physique n'a aucun rôle à jouer. Enfin, en théorie hypersonique des petites perturbations, G ayant la valeur constante (6), les formules précédentes sont, cette fois, des formules de solution. Ces formules de solution sont explicitées au début du paragraphe II.3.1.

Le second problème – restitution du plan physique – se traite tout aussi simplement que le premier. Les coordonnées x, y, du profil sont des fonctions connues $X(\beta)$, $Y(\beta)$, de β dès que la forme du profil est connue, mais alors, d'après la définition des caractéristiques (C_+) l'on a, en tout point de l'écoulement, les formules suivantes assurant la restitution du plan physique :

$$\begin{cases} x(\beta, S) = X(\beta) + \int_S^{S_0} H(\beta, \Sigma) \cos\left[\theta(\beta, \Sigma) + \mu(\beta, \Sigma)\right] d\Sigma, \\ y(\beta, S) = Y(\beta) + \int_S^{S_0} H(\beta, \Sigma) \sin\left[\theta(\beta, \Sigma) + \mu(\beta, \Sigma)\right] d\Sigma. \end{cases} \tag{29}$$

La signification géométrique de la fonction H est claire. Cette signification montre que $\rho q H \sin\mu$ reste constant le long d'une ligne de courant, en désignant par q le module de la vitesse. La constance de l'entropie sur toute ligne de courant entraîne donc celle du produit $Hp^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}$. Ainsi, avec la convention précédemment introduite relativement à l'onde de choc, il vient :

$$\begin{cases} H(\beta, S) = H^*(S)\, \mathcal{K}(\beta, S), \\ \mathcal{K}(\beta, S) = \left(\dfrac{p^*(S)}{p(\beta, S)} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \end{cases} \tag{30}$$

Comme la fonction $\mathcal{K}(\beta, S)$ est connue dès que la solution du premier problème est acquise, il résulte de (29) et (30) que le second problème est ramené à la détermination de la seule fonction $H^*(S)$. Une condition assurant cette détermination est obtenue en calculant de deux

manières différentes la pente de l'onde de choc dans le plan physique en fonction de S : d'une part d'après les formules (29), d'autre part d'après les conditions de RANKINE-HUGONIOT. Comme la chose nécessite quelques calculs, seul le résultat sera donné ici, en renvoyant à la sectionII.2pour une démonstration détaillée. On trouve que la fonction $H^*(S)$ doit être solution de l'équation de VOLTERRA :

$$H^*(S) = L(S) + \int_{s}^{s_o} \Lambda(S,\Sigma)\, H^*(\Sigma) d\Sigma . \tag{31}$$

La fonction $L(S)$ et le noyau $\Lambda(S,\Sigma)$ de cette équation qui sont définis par les formules (2-102) sont connus dès que la solution du premier problème est acquise.

Le lecteur est maintenant en possession de tout le matériel de formules relatif à cette méthode de choc-détente; s'il ne s'intéresse pas à des démonstrations rigoureuses et se contente des explications ci-dessus, il peut sauter l'exposé systématique qui fait l'objet de la section II.2.

Dans la section II.3. quelques applications sont données, dont la plus importante fait l'objet du paragraphe II.3.3.

Dans la section II.4., l'extension de la méthode aux écoulements tridimensionnels sera envisagée brièvement. Il n'y a là rien de nouveau, mais il n'était pas possible de terminer le chapitre sans faire allusion aux travaux de EGGERS [8] et SAVIN [43]; d'autant plus que les formules fort élégantes (4.29) dues à SAVIN sont fort utiles en raison de leur simplicité et de leur efficacité numérique.

II, 2. EXPOSÉ SYSTÉMATIQUE.

II,2.1. *FORME CANONIQUE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.*

Le fluide considéré est un gaz idéal dont la pression p, la masse spécifique ρ, l'entropie spécifique S, l'enthalpie spécifique h et la température T, sont liées par les relations :

$$\begin{cases} p = \mathcal{R}\rho T, \quad \mathcal{R} = c_p - c_v, \\ p = \rho^{\gamma} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right), \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \\ h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \end{cases} \tag{1}$$

Les écoulements considérés dans cette section sont plans. Les axes ox et oy sont rectangulaires et les vecteurs unitaires portés par ces axes sont notés $\vec{i}$, $\vec{j}$. Le vecteur vitesse est noté :

$$\begin{cases} \vec{V} = q\vec{t}, \\ \vec{t} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta . \end{cases} \tag{2}$$

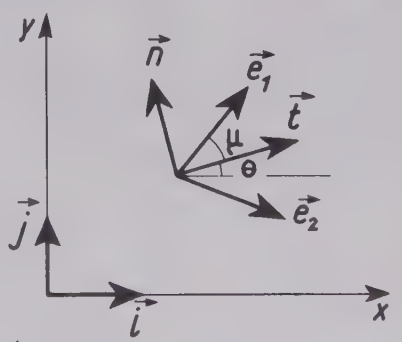


Fig. 8

Les équations du mouvement, sous forme vectorielle, sont :

$$\begin{cases} \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = 0, \\ \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0, \\ \vec{t}\cdot\vec{\nabla}S = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Lorsque l'on introduit le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à $\vec{t}$, défini par

$$\vec{n} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta , \tag{4}$$

il n'est pas difficile de se convaincre que, moyennant (1), les équations (3) sont équivalentes

aux équations suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \vec{\nabla} p = -\dfrac{\rho q^2}{M^2-1}\,\vec{t}\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\theta - \rho q^2 \vec{n}\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\theta, & a) \\ \vec{t}\cdot\vec{\nabla}(h+q^2/2)=0, & b) \\ \vec{t}\cdot\vec{\nabla}S=0, & c) \end{cases}$$

où $M = q/a = 1/\sin\mu$ désigne le nombre de Mach local.

La forme du second membre de (4 a) suggère de considérer le problème aux valeurs propres suivant

$$(5)\qquad \vec{e_i}\cdot\vec{n}\,\vec{t} + \frac{\vec{e_i}\cdot\vec{t}}{M^2-1}\,\vec{n} = \lambda_i\,\vec{e_i},$$

lequel admet les solutions :

$$(6)\qquad \begin{cases} \vec{e_1} = \vec{t}\cos\mu + \vec{n}\sin\mu, & \lambda_1 = \operatorname{tg}\mu, \\ \vec{e_2} = \vec{t}\cos\mu - \vec{n}\sin\mu, & \lambda_2 = -\operatorname{tg}\mu. \end{cases}$$

Il résulte alors de (5) et de :

$$(7)\qquad \rho q^2 \operatorname{tg}\mu = \frac{2\gamma p}{\sin(2\mu)},$$

que l'équation vectorielle (4 a) est équivalente aux deux équations scalaires suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} \vec{e_1}\cdot\vec{\nabla} p = -\dfrac{2\gamma p}{\sin 2\mu}\,\vec{e_1}\cdot\vec{\nabla}\theta, & a) \\ \vec{e_2}\cdot\vec{\nabla} p = \dfrac{2\gamma p}{\sin 2\mu}\,\vec{e_2}\cdot\vec{\nabla}\theta. & b) \end{cases}$$

Soient (C_+) (respectivement (C_-)) les caractéristiques ou lignes de Mach montantes (respectivement descendantes), courbes intégrales du champ de vecteurs $\vec{e_1}$ (respectivement $\vec{e_2}$). Le double réseau de courbes (C_+), (C_-) permet de définir un système de coordonnées curvilignes par la condition que α_1 (respectivement β_1) reste constant sur toute courbe (C_-) (respectivement (C_+)).

Il est clair, d'après (2) et (6), qu'il existe deux fonctions $A(\alpha_1, \beta_1)$, $B(\alpha_1, \beta_1)$, telles que l'on ait :

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\alpha_1} = A\cos(\theta+\mu), & a) \qquad \dfrac{\partial y}{\partial\alpha_1} = A\sin(\theta+\mu), & c) \\ \dfrac{\partial x}{\partial\beta_1} = B\cos(\theta-\mu), & b) \qquad \dfrac{\partial y}{\partial\beta_1} = B\sin(\theta-\mu). & d) \end{cases}$$

La signification géométrique de A et B est précisée par la relation :

$$(10)\qquad dx^2 + dy^2 = A^2 d\alpha_1^2 + 2AB\cos(2\mu)\,d\alpha_1\,d\beta_1 + B^2 d\beta_1^2,$$

et l'on a successivement :

$$(11)\qquad \begin{cases} \vec{e_1}\cdot\vec{\nabla} = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}, & a) \\ \vec{e_2}\cdot\vec{\nabla} = \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}, & b) \\ 2AB\cos\mu\;\vec{t}\cdot\vec{\nabla} = B\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1} + A\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}, & c) \\ 2AB\sin\mu\;\vec{n}\cdot\vec{\nabla} = B\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1} - A\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}. & d) \end{cases}$$

De ce qui précède résulte que pour les écoulements à enthalpie génératrice constante, qui sont les seuls à être considérés ici, les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme équivalente suivante :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \alpha_1} = -\dfrac{2\gamma p}{\sin 2\mu}\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}, & a) \\ \dfrac{\partial p}{\partial \beta_1} = \dfrac{2\gamma p}{\sin 2\mu}\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta_1}, & b) \\ B\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} + A\dfrac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0, & c) \\ q^2 + 2h = q^2\left(1 + \dfrac{2}{\gamma - 1}\sin^2\mu\right) = q_l^2 . & d) \end{cases}$$

Le lecteur reconnaîtra en (12 *a*, *b*, *c*) les équations (1.7) de l'introduction.

Il sera commode d'utiliser, simultanément avec (12 *a*, *b*), les équations suivantes, bien connues par leur utilisation dans la méthode numérique d'intégration pas à pas, dite des caractéristiques :

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha_1} + \dfrac{2\cos^2\mu}{\gamma - 1 + 2\sin^2\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \dfrac{\sin\mu\cos\mu}{\gamma(\gamma-1)c_v}\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1}, & a) \\ -\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta_1} + \dfrac{2\cos^2\mu}{\gamma - 1 + 2\sin^2\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \beta_1} = \dfrac{\sin\mu\cos\mu}{\gamma(\gamma-1)c_v}\dfrac{\partial S}{\partial \beta_1}, & b) \end{cases}$$

lesquelles se déduisent de (12 *a*, *b*) grâce à la relation

$$(14)\quad \frac{2(\gamma-1)\operatorname{cotg}\mu}{\gamma - 1 + 2\sin^2\mu}\,d\mu = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp}{p} + \frac{dS}{\gamma c_v},$$

qui peut être obtenue par différentiation de (12 *d*) compte tenu de (1).

Lorsque les conditions d'intégrabilité de (9) sont exprimées, il vient :

$$(15)\quad \begin{cases} \sin 2\mu\dfrac{\partial A}{\partial \beta_1} = -A\cos 2\mu\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta_1} + \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta_1}\right) + B\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha_1}\right), & a) \\ \sin 2\mu\dfrac{\partial B}{\partial \alpha_1} = -A\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta_1} + \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta_1}\right) + B\cos 2\mu\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha_1}\right), & b) \end{cases}$$

Le matériel de formules précédent est complété par l'introduction du nombre de BUSEMANN :

$$(16)\quad \nu = \int_{\mu}^{\pi/2} \frac{2\cos^2\mu}{\gamma - 1 + 2\sin^2\mu}\,d\mu = \mu + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{Artg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\operatorname{cotg}\mu\right) - \frac{\pi}{2}.$$

D'après (12 *d*), il est clair que la vitesse q peut s'exprimer comme fonction de ν :

$$(17)\quad q = q_l\,Q(\nu),$$

enfin, la pression est elle-même donnée par :

$$(18)\quad p = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}q_l^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[1 - Q^2(\nu)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left[-\frac{S}{(\gamma-1)c_v}\right].$$

II,2.2. *NOUVELLE FORME DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT, FAISANT JOUER UN RÔLE PRIVILÉGIÉ AUX LIGNES DE COURANT ET AUX LIGNES DE MACH MONTANTES.*

Il n'est pas difficile de voir que le paramètre η de EGGERS et SYVERTSON [10] qui a été déjà considéré dans l'introduction est susceptible de la définition précise suivante, en termes des notations introduites en II.2.1 :

$$\eta = \frac{\vec{e_1} \cdot \vec{\nabla}\theta}{\vec{e_2} \cdot \vec{\nabla}\theta} = -\frac{\vec{e_1} \cdot \vec{\nabla}p}{\vec{e_2} \cdot \vec{\nabla}p}. \tag{19}$$

Dans ces conditions, d'après (11) et (8) l'on a :

$$\frac{\sin 2\mu}{2\gamma p} \vec{t} \cdot \vec{\nabla}p = \frac{1-\eta}{1+\eta} \vec{t} \cdot \vec{\nabla}\theta. \tag{20}$$

Admettons, pour un instant, que η puisse être négligé devant l'unité, il est clair alors que (20), compte tenu de (4*c*), (14), (16) peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{t} \cdot \vec{\nabla}(\nu + \theta) = 0. \tag{21}$$

Maintenant, si l'on se rappelle que l'on étudie essentiellement l'écoulement derrière l'onde de choc de tête attachée à la pointe, parfaitement vive, d'un profil plan convexe, il est tout naturel de prendre S comme paramètre le long de cette onde de choc.

Ainsi, en caractérisant par une astérisque en indice supérieur les valeurs prises sur l'onde de choc par une grandeur caractéristique de l'écoulement, il est clair que ν^* et θ^* sont des fonctions connues de S :

$$\begin{cases} \nu^* = \nu^*(S), \\ \theta^* = \theta^*(S), \end{cases} \tag{22}$$

et la relation (21), compte tenu de (4*c*) s'écrit :

$$\nu + \theta = \nu^*(S) + \theta^*(S). \tag{23}$$

Ainsi parvient-on à la conclusion que, lorsque η peut être négligé devant l'unité, ν est une fonction de θ et S :

$$\nu = \nu(\theta, S) = \nu^*(S) + \theta^*(S) - \theta. \tag{24}$$

En vertu de (17) (18) et (1), il est clair que lorsque l'on prend θ et S comme variables indépendantes, toutes les grandeurs caractéristiques de l'écoulement sont complètement déterminées par des relations de la forme

$$p = p(\theta, S); \quad \rho = \rho(\theta, S); \quad q = q(\theta, S), \tag{25}$$

et le seul problème qui reste à résoudre est la reconstitution du plan physique, c'est-à-dire la détermination de formules du type :

$$\begin{cases} x = x(\theta, S), \\ y = y(\theta, S). \end{cases} \tag{26}$$

Ainsi, à supposer que η puisse être considéré comme nul le problème de la détermination de l'écoulement pourrait être dissocié en deux problèmes distincts : 1° Détermination des variables thermodynamiques dans le plan $(\theta - S)$; 2° reconstitution du plan physique.

Assurément, η n'est pas nul, car, dès que l'écoulement n'est pas isentropique, il y a incompatibilité entre (12) et $\eta = 0$. La situation précédemment décrite est donc irréelle. Toutefois, l'on remarque que si l'on relaxe (12*a*) il n'y a plus incompatibilité entre (12) et $\eta = 0$, et cela suggère d'essayer de réaliser le programme suivant : substituer S à α_1, comme variable indépendante, substituer à (12*a, b*) l'équation (20) et une formule de représentation pour η.

L'idée de faire jouer à β_1, un rôle privilégié par rapport à α_1, découle directement des équations (25) et du fait que $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} = 0$ lorsque $\eta = 0$, d'où résulte qu'alors les lignes iso-θ sont aussi des lignes iso-β.

L'idée de substituer à l'une des équations (12 *a*, *b*) une formule de représentation pour η (formule (12) de l'introduction) procède de la remarque concernant l'incompatibilité de (12) et de $\eta = 0$. Il n'est alors pas difficile d'imaginer un schéma, formel, d'approximations successives qui tire avantage du fait, empirique, que $\eta \ll 1$. Dans une première étape, laissons de côté la formule de représentation de η en faisant $\eta = 0$ et intégrons les équations restantes; portons alors le résultat de cette intégration dans la formule de représentation de η et recommençons indéfiniment.

Bien qu'une démonstration rigoureuse n'en soit assurément pas facile, la convergence de ce procédé paraît très probable. Quoi qu'il en soit, la considération de ce procédé permet d'intégrer la méthode de choc-détente dans un cadre systématique, et cela peut suffire à en justifier l'intérêt pour le théoricien. Un autre intérêt est de conduire à une formulation entièrement explicite du procédé de construction de l'écoulement par couches successives imaginé par EGGERS, SAVIN et SYVERTSON [9].

Conformément aux idées précédemment développées, introduisons donc de nouvelles variables indépendantes β et S, liées aux anciennes par les formules :

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} \beta = \beta_1, \\ S = S(\alpha_1, \beta_1). \end{cases}$$

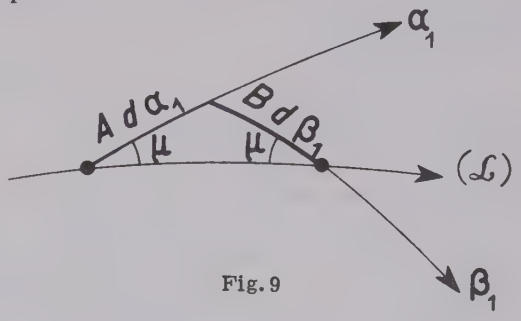


Fig. 9

Les formules de changement de variables sont :

$$\text{(28)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} = S_{\alpha_1} \dfrac{\partial}{\partial S}, & a) \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta_1} = S_{\beta_1} \dfrac{\partial}{\partial S} + \dfrac{\partial}{\partial \beta}, & b) \end{cases}$$

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial S} = \dfrac{1}{S_{\alpha_1}} \dfrac{\partial}{\partial_{\alpha_1}}, & c) \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} = \dfrac{\partial}{\partial \beta_1} + \dfrac{B}{A} \dfrac{\partial}{\partial_{\alpha_1}}. & d) \end{cases}$$

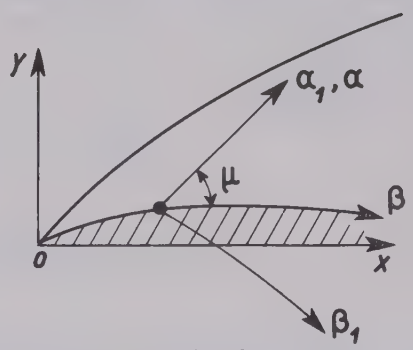


Fig. 10

D'après (11) l'on a :

$$\text{(30)} \qquad \vec{t} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{2B \cos \mu} \frac{\partial}{\partial \beta},$$

de sorte que (20) s'écrit :

$$\text{(31)} \qquad \frac{\sin 2\mu}{2\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta},$$

ou encore :

$$\text{(32)} \qquad \frac{\partial \nu}{\partial \beta} + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0.$$

Il faut maintenant obtenir une équation qui, avec (31) forme un système équivalent à (12 *a*, *b*). Pour cela, l'on forme la combinaison suivante de (12 *a*, *b*) :

$$\text{(33)} \qquad -\frac{1}{\sin \mu \cos \mu} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{1}{\sin \mu \cos \mu} \frac{\partial \theta}{\partial \beta_1} d\beta_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p},$$

laquelle conduit à l'équation cherchée :

$$\text{(34)} \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{\sin \mu \cos \mu} \frac{\partial \theta}{\partial \beta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\sin \mu \cos \mu} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1} \right) = 0.$$

Les équations (31, 34) sont elles équivalentes à (12 *a, b*) ? La question mérite un examen spécial. L'équation (34) assure l'existence, locale, d'une fonction $\mathcal{U}(\alpha_1, \beta_1)$ telle que :

$$\frac{1}{\sin\mu\cos\mu}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} = -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{1}{\sin\mu\cos\mu}\frac{\partial\theta}{\partial\beta_1} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\beta_1}. \tag{35}$$

Lorsque l'on pose $\varpi = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{Log}\,p$, l'équation (31), compte tenu de (19) montre que :

$$B\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\alpha_1}\right) + A\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_1} - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\beta_1}\right) = 0\,; \tag{36}$$

de cette équation et de (12 *c*) résulte alors l'existence d'une fonction $C(\alpha_1, \beta_1)$ telle que :

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\alpha_1} + C\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_1} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\beta_1} + C\frac{\partial S}{\partial\beta_1}, \tag{37}$$

et cette fonction vérifie l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(C\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(C\frac{\partial S}{\partial\beta_1}\right) = 0, \tag{38}$$

soit encore :

$$\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\,C = 0. \tag{39}$$

Ainsi la fonction C est elle constante par intervalles sur chaque ligne de courant. L'équivalence de (31, 34) et de (12 *a, b*) exige :

$$C = 0, \tag{40}$$

ce qui n'est une conséquence de (39) que si l'on impose à C la condition supplémentaire d'être continue à la traversée de toute onde de choc. Dans le cas de l'écoulement derrière l'onde de choc attachée à la pointe d'un profil convexe, cas qui nous intéresse seul ici, il suffira donc d'imposer $C = 0$ sur l'onde de choc de tête pour que $C = 0$ derrière elle.

Ainsi (31, 34) sont-elles équivalentes à (12 *a, b*) sous réserve d'ajouter la condition supplémentaire (40) sur l'onde de choc. Nous verrons ultérieurement que cette condition assure la détermination de η sur l'onde de choc.

En développant (34), en faisant usage de (13) et de la définition de η il vient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1\partial\beta_1} = G(1-\eta)\frac{\partial\theta}{\partial\beta_1}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} = -\frac{A}{B}G(1-\eta)\frac{\partial\theta}{\partial\beta_1}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}, \tag{41}$$

avec

$$G = \frac{\gamma - 1 + 2\sin^2\mu}{4\gamma(\gamma-1)C_v\cos^2\mu}\cos(2\mu). \tag{42}$$

La proposition suivante est donc établie : *moyennant l'introduction d'une condition supplémentaire sur l'onde de choc de tête,* les équations (12) sont équivalentes aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\eta = \dfrac{B}{A}\dfrac{\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta_1}}, & a)\\[2ex]
\vec{t}\cdot\vec{\nabla}p = \dfrac{2\gamma p}{\sin 2\mu}\dfrac{1-\eta}{1+\eta}\vec{t}\cdot\vec{\nabla}p, & b)\\[2ex]
\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1\partial\beta_1} = (1-\eta)G\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta_1}\dfrac{\partial S}{\partial\alpha_1} = -\dfrac{A}{B}G(1-\eta)\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta_1}\dfrac{\partial S}{\partial\alpha_1}, & c)\\[2ex]
\vec{t}\cdot\vec{\nabla}S = 0, & d)\\[2ex]
q^2 + 2h = q^2\left(1 + \dfrac{2}{\gamma-1}\sin^2\mu\right) = q_l^2. & e)
\end{array}\right. \tag{43}$$

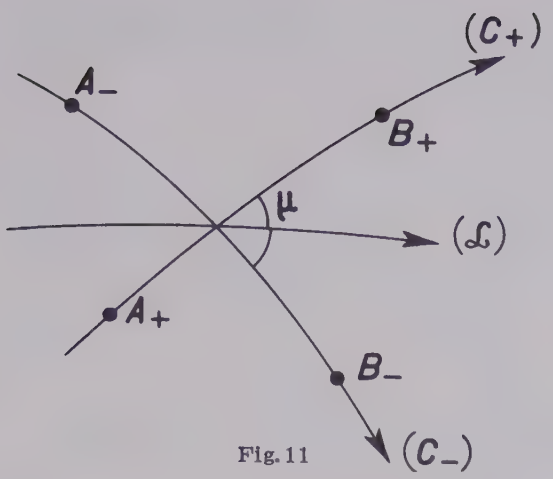


Fig. 11

Pour achever de réaliser le programme initialement tracé, il faut encore subsistuer à (43 *c*) une formule de représentation pour le paramètre η. Dans ce but, considérons sur la figure 11 deux points A_+ et B_+ situés sur une même ligne (C_+); par intégration de (43 *c*) l'on a :

$$(44)\quad \begin{cases} \theta_{\beta_1}(B_+) = \theta_{\beta_1}(A_+)\,\exp\left\{\displaystyle\int_{A_+}^{B_+} G(1-\eta)\,dS\right\}, \\ \theta_{\beta_1}(B_+) = \theta_{\beta_1}(A_+) + \displaystyle\int_{A_+}^{B_+} G(1-\eta)\theta_{\beta_1}\,dS. \end{cases}$$

De la même manière, soient A_- et B_- deux points situés sur une même ligne (C_-) l'on a, par intégration de (43 *c*) :

$$(45)\qquad \theta_{\alpha_1}(B_-) = \theta_{\alpha_1}(A_-) - \int_{A_-}^{B_-} \frac{A}{B}\, G(1-\eta)\theta_{\beta_1}\,dS.$$

Appliquons les formules (44) et (45) en prenant B_+ et B_- confondus en un point M de l'écoulement et A_- et A_+ en N et P sur l'onde de choc comme l'indique la figure 12. D'après (43 *a*) l'on a :

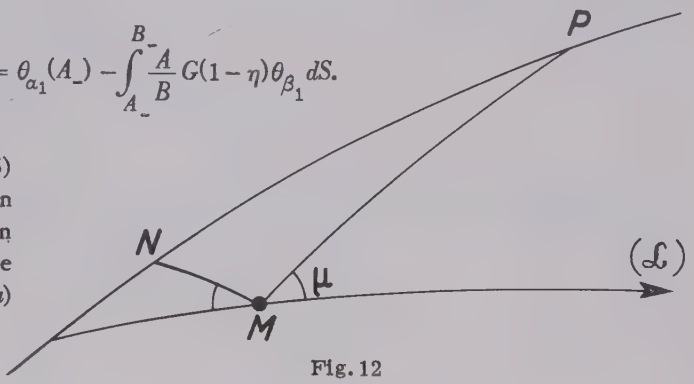


Fig. 12

$$(46)\qquad \eta(M) = \frac{a\eta_1 - b\eta_2}{a+b},$$

avec :

$$(47)\qquad a = \theta_{\beta_1}(P), \qquad b = \int_P^M G(1-\eta)\theta_{\beta_1}\,dS,$$

$$(48)\quad \begin{cases} \eta_1(M) = \dfrac{B(M)}{A(M)}\,\dfrac{\theta_{\alpha_1}(N)}{\theta_{\beta_1}(P)} = \dfrac{B(M)}{B(N)}\,\dfrac{A(N)}{A(M)}\,\dfrac{\theta_{\beta_1}(N)}{\theta_{\beta_1}(P)}\,\eta^*(N), \\ \eta_2(M) = \dfrac{\dfrac{B(M)}{A(M)}\displaystyle\int_N^M \frac{A}{B}\,G(1-\eta)\,\theta_{\beta_1}\,dS}{\displaystyle\int_P^M G(1-\eta)\theta_{\beta_1}\,dS} \end{cases}$$

Dans (48 *a*) $\eta^*(N)$ désigne la valeur prise par η sur l'onde de choc :

$$(49)\qquad \eta^*(N) = \frac{B(N)}{A(N)}\,\frac{\theta_{\alpha_1}(N)}{\theta_{\beta_1}(N)},$$

conformément à une notation qui a déjà été introduite à propos de la formule (22) et qui sera constamment utilisée par la suite.

Le moment est venu de montrer que la condition supplémentaire $C^* = 0$, précédemment introduite, à propos de la formule (40), assure la détermination de η^*. En effet, cette condition

supplémentaire, d'après (37), entraîne que (12 a - b) sont vérifiées sur l'onde de choc, soit :

$$(50)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial p}{\partial \alpha_1}\right)^* = -\dfrac{2\gamma p^*}{\sin 2\mu^*}\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}\right)^*, \\ \left(\dfrac{\partial p}{\partial \beta_1}\right)^* = \dfrac{2\gamma p^*}{\sin 2\mu^*}\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta_1}\right)^*. \end{cases}$$

Par ailleurs, en désignant par δ une dérivation en suivant l'onde de choc, l'on a :

$$(51)\qquad \begin{cases} \delta p^* = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \alpha_1}\right)^* \delta\alpha_1^* + \left(\dfrac{\partial p}{\partial \beta_1}\right)^* \delta\beta_1^*, \\ \delta\theta^* = \left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}\right)^* \delta\alpha_1^* + \left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta_1}\right)^* \delta\beta_1^*, \end{cases}$$

d'où résulte :

$$(52)\qquad \frac{\delta p^*}{\delta\theta^*} = \frac{2\gamma p^*}{\sin 2\mu^*}\,\frac{1 - \eta^* \dfrac{A^*}{B^*}\dfrac{\delta\alpha_1^*}{\delta\beta_1^*}}{1 + \eta^* \dfrac{A^*}{B^*}\dfrac{\delta\alpha_1^*}{\delta\beta_1^*}}.$$

Maintenant, soit ω l'angle d'inclinaison de la tangente à l'onde de choc sur l'axe ox, l'on a, d'après (9) :

$$(53)\qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{\delta y^*}{\delta x^*} = \frac{A^* \sin(\theta^* + \mu^*)\,\delta\alpha_1^* + B^* \sin(\theta^* - \mu^*)\,\delta\beta_1^*}{A^* \cos(\theta^* + \mu^*)\,\delta\alpha_1^* + B^* \cos(\theta^* - \mu^*)\,\delta\beta_1^*}.$$

La valeur de η^* résulte alors de (52) (53) sous la forme :

$$(54)\qquad \eta^* = \frac{\sin(\mu^* - \omega + \theta^*)}{\sin(\mu^* + \omega - \theta^*)}\,\frac{1 - \dfrac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\dfrac{\delta p^*}{\delta\theta^*}}{1 + \dfrac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\dfrac{\delta p^*}{\delta\theta^*}}.$$

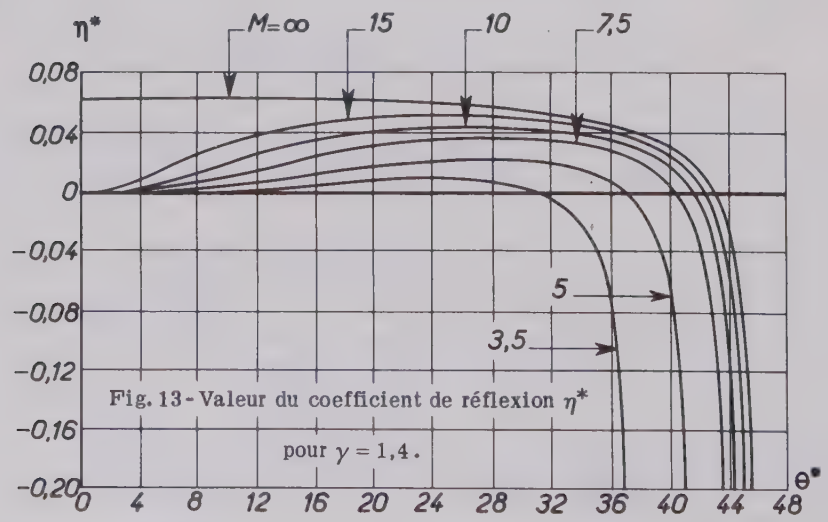


Fig. 13 - Valeur du coefficient de réflexion η^* pour $\gamma = 1{,}4$.

La figure 13, extraite de la référence [10] donne les valeurs de η^* pour l'air; on peut voir que η^* reste très petit, même pour des nombres de Mach très élevés, et jusqu'au voisinage du détachement.

Il reste maintenant à examiner le problème de la restitution du plan physique, c'est-à-dire la détermination de formules du type :

$$\begin{cases} x = x(\beta, S), \\ y = y(\beta, S), \end{cases} \tag{55}$$

et, en outre, à savoir déterminer les fonctions A et B qui figurent dans la formule de représentation de η. En ce qui concerne la restitution du plan physique, le problème revient à l'intégration du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial S} = -H\cos(\theta+\mu), & a) \\ \dfrac{\partial y}{\partial S} = -H\sin(\theta+\mu), & b) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = K\cos\theta, & c) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = K\sin\theta. & d) \end{cases} \tag{56}$$

La signification géométrique des fonctions H et K est précisée par la formule :

$$dx^2 + dy^2 = H^2 dS^2 - 2HK\cos\mu\, d\beta dS + K^2 d\beta^2. \tag{57}$$

Plutôt que de conserver tel quel le système (56), il est préférable de lui substituer un système différentiel pour H et K et d'assurer ensuite la détermination de (55) par intégration de (56) le long de $\beta = C^{te}$. Le système différentiel en H et K est immédiatement obtenu en écrivant les conditions d'intégrabilité du système (56)

$$\begin{cases} \sin\mu\,\dfrac{\partial H}{\partial \beta} = -K\dfrac{\partial \theta}{\partial S} - H\cos\mu\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta}\right), \\ \sin\mu\,\dfrac{\partial K}{\partial S} = H\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta}\right) + K\cos\mu\,\dfrac{\partial \theta}{\partial S}. \end{cases} \tag{58}$$

Maintenant, si l'on remarque que :

$$\vec{t}\cdot\vec{\nabla} = \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial \beta}, \qquad \vec{e}_1\cdot\vec{\nabla} = -\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial S}, \tag{59}$$

et si l'on utilise (14) et (43), l'on peut obtenir les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta} = \left(\dfrac{\gamma+1}{2\gamma} + \dfrac{2\eta}{1-\eta}\,\dfrac{\cos^2\mu}{\gamma}\right)\dfrac{\mathrm{tg}\,\mu}{p}\,\dfrac{\partial p}{\partial \beta}, \\ K\dfrac{\partial \theta}{\partial S} = -\dfrac{2\eta}{1-\eta}\,H\sin\mu\cos^2\mu\,\dfrac{1}{\gamma p}\,\dfrac{\partial p}{\partial \beta}, \end{cases} \tag{60}$$

de sorte que le système (58) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial H}{\partial \beta} + \dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\,\dfrac{1}{p}\,\dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0, & a) \\ \dfrac{\partial K}{\partial S} - \dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\,\dfrac{H}{\cos\mu}\,\dfrac{1}{p}\,\dfrac{\partial p}{\partial \beta} = \dfrac{2\eta}{1-\eta}\,\dfrac{H\sin^2\mu\cos\mu}{\gamma p}\,\dfrac{\partial p}{\partial \beta}. & b) \end{cases} \tag{61}$$

La forme particulièrement simple de (61 *a*) était prévisible *a priori* car cette équation exprime que $\rho q H \sin\mu$ est constant le long d'une ligne de courant, ainsi que cela a été signalé dans l'introduction. C'est là qu'est la clé du processus numérique de construction par couches mis au point par EGGERS et SYVERTSON.

En ce qui concerne les fonctions A et B figurant dans la formule de représentation de η, la question est toute simple pour B puisque, en comparant (30) et (59) l'on voit que :

$$B = \frac{K}{2\cos\mu}. \tag{62}$$

Pour A, il faut faire appel à la formule (15 a) que l'on peut récrire, après quelques manipulations, sous la forme :

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta_1}+\frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\cos 2\mu}{\cos^2\mu}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial \beta_1}-\frac{(\gamma-1+2\sin^2\mu)\sin^2\mu}{2\gamma(\gamma-1)C_v\cos^2\mu}\frac{\partial S}{\partial \beta_1}=\frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\eta}{\cos^2\mu}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial \beta_1}. \tag{63}$$

Ainsi la détermination de A résulte-t-elle de l'intégration d'une équation différentielle ordinaire le long des lignes (C_-). Ces lignes ne sont pas connues *a priori* dans le plan (β, S), mais il n'est pas difficile de s'assurer que ce sont les courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$K d\beta + 2H\cos\mu\, dS = 0. \tag{64}$$

Ainsi, pour déterminer A, doit-on intégrer, le long de (64) l'équation différentielle :

$$\frac{dA}{A}+\frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\cos 2\mu}{\cos^2\mu}\frac{dp}{p}-\frac{(\gamma-1+2\sin^2\mu)\sin^2\mu}{2\gamma(\gamma-1)C_v\cos^2\mu}dS=\frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\eta}{\cos^2\mu}\frac{dp}{p}. \tag{65}$$

Lorsque, après avoir remarqué que $\theta_\beta = (1+\eta)\theta_{\beta_1}$, l'on pose, comme cela est suggéré par l'équation (44 a),

$$\mathcal{V}(\beta, S) = \frac{1}{1+\eta(\beta, S)}\frac{\partial\theta(\beta, S)}{\partial\beta}, \tag{66}$$

et que l'on rassemble les résultats obtenus dans ce §, l'on est conduit à énoncer la proposition suivante :

Dans le plan (β, S) dont l'image des lignes coordonnées dans le plan physique est formée des lignes de Mach montantes et des lignes de courant, les équations du mouvement sont équivalentes aux trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta(\beta, S) = \theta(\beta_0, S) + \displaystyle\int_{\beta_0}^{\beta} \mathcal{V}(\beta', S)[1+\eta(\beta', S)]d\beta', & a) \\ \nu(\beta, S) = \nu(\beta_0, S) - \displaystyle\int_{\beta_0}^{\beta} \mathcal{V}(\beta', S)[1-\eta(\beta', S)]d\beta', & b) \\ \mathcal{V}(\beta, S) = \mathcal{V}(\beta, S_0)\exp\left\{\displaystyle\int_{S_0}^{S} G(\beta, \Sigma)[1-\eta(\beta, \Sigma)]\,d\Sigma\right\}, & c) \end{cases} \tag{67}$$

où l'on convient d'éliminer les discontinuités de S dans le calcul de l'intégrale de (67 c). A ce système (67) il convient d'ailleurs d'ajouter les conditions suivantes :

1. Les relations permettant d'effectuer le calcul des grandeurs physiques :

$$\nu = \mu + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\mathrm{cotg}\,\mu\right)-\frac{\pi}{2}, \tag{68}$$

$$q = q_l\, Q(\nu),$$

$$p = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}q_l^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[1-Q^2(\nu)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left[-\frac{S}{(\gamma-1)C_v}\right].$$

2. Un système différentiel permettant d'effectuer la reconstitution du plan physique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial S} = -H\cos(\theta+\mu), & \dfrac{\partial y}{\partial S} = -H\sin(\theta+\mu), \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = K\cos\theta, & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = K\sin\theta, \end{cases} \tag{69}$$

système dont les conditions de compatibilité fournissent un système différentiel en H et K

$$(70)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left\{\mathrm{Log}\left(Hp^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\right)\right\}=0, & a) \\ \dfrac{\partial K}{\partial S}-\dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\dfrac{H}{\cos\mu}\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial p}{\partial\beta}=\dfrac{2\eta H\sin^2\mu\cos\mu}{(1-\eta)\gamma p}\dfrac{\partial p}{\partial\beta}. & b) \end{cases}$$

3. Une formule de représentation pour η que l'on peut décrire comme suit. Soit M un point du plan (β,S) dans la dépendance de l'onde de choc de tête attachée à la pointe d'un profil plan convexe. Traçons, d'une part le segment MP parallèle à l'axe $\beta = C^{te}$ limité à l'onde de choc, d'autre part l'arc de courbe intégrale MN de l'équation

$$(71)\qquad K d\beta + 2H\cos\mu\, dS = 0,$$

également limité à l'onde de choc. Dans ces conditions, l'on a :

$$(72)\qquad \eta(M)=\frac{a\eta_1-b\eta_2}{a+b},$$

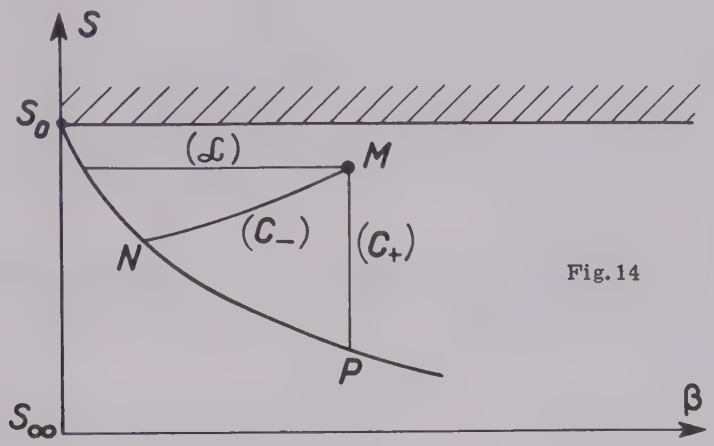


Fig. 14

avec :

$$(73)\qquad a=\mathcal{V}(P),\qquad b=\int_P^M G(1-\eta)\,\mathcal{V}\,dS,$$

$$(74)\qquad \begin{cases} \eta_1(M)=\dfrac{B(M)}{B(N)}\dfrac{A(N)}{A(M)}\dfrac{\mathcal{V}(N)}{\mathcal{V}(P)}\eta^*(N), \\ \eta_2(M)=\dfrac{B(M)}{A(M)}\dfrac{\displaystyle\int_N^M \frac{A}{B}G(1-\eta)\,\mathcal{V}\,dS}{\displaystyle\int_P^M G(1-\eta)\,\mathcal{V}\,dS}. \end{cases}$$

L'expression B qui figure dans (74) est donnée par :

$$(75)\qquad B=\frac{K}{2\cos\mu},$$

enfin, l'expression A vérifie l'équation différentielle

$$(76)\qquad \frac{dA}{A}+\frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\cos 2\mu}{\cos^2\mu}\frac{dp}{p}-\frac{(\gamma-1+2\sin^2\mu)\sin^2\mu}{2\gamma(\gamma-1)C_v\cos^2\mu}dS=\frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\eta}{\cos^2\mu}\frac{dp}{p},$$

le long de toute courbe intégrale de (71).

4. Enfin, sur l'onde de choc de tête, la valeur de η est donnée par la formule :

$$\eta^* = \frac{\sin(\mu^* - \omega + \theta^*)}{\sin(\mu^* + \omega - \theta^*)} \cdot \frac{1 - \dfrac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\dfrac{\delta p^*}{\delta \theta^*}}{1 + \dfrac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\dfrac{\delta p^*}{\delta \theta^*}}, \tag{77}$$

où ω désigne l'angle d'inclinaison de l'onde de choc.

II,2.3. *ESQUISSE D'UN SCHÉMA FORMEL D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.*

Nous savons (*voir fig. 13*) que, pour l'air, et jusqu'au voisinage du détachement, η^* est très petit. Pour un profil convexe à courbure variant d'une manière régulière, nous savons également, sur une base empirique, confirmée par les estimations grossières données dans l'introduction, que η reste très petit, uniformément dans tout l'écoulement. La forme des équations données dans l'énoncé de la proposition formulée à la fin du § 2.2 précédent, suggère la construction d'un schéma d'approximations successives basé sur η consistant à remplacer η, à chaque stade par la valeur calculée d'après (72) au moyen des données du stade précédent. Le premier stade caractérisé par $\eta = 0$ peut donc être considéré comme une formulation entièrement analytique de la méthode de choc-détente remplaçant le procédé numérique pas à pas de construction de l'écoulement par couches successives imaginé par EGGERS, SAVIN et SYVERTSON [9]. Précisons une fois de plus que l'on s'intéresse uniquement ici à l'écoulement dans le domaine de dépendance de l'onde de choc de tête attachée à la pointe d'un profil convexe.

Examinons d'abord les conditions aux limites dont il faut assortir les équations du mouvement. Et d'abord sur le profil lui-même. Soit θ_0 l'inclinaison de la tangente à la pointe et S_0 la valeur de l'entropie sur le profil, de sorte qu'avec la convention relative à l'astérisque en indice supérieur l'on a :

$$\theta_0 = \theta^*(S_0). \tag{78}$$

Il est clair que, dans le choix de β, il y a un certain arbitraire dont il est possible de profiter, de manière que :

$$\frac{\partial \theta(\beta, S_0)}{\partial \beta} = -1, \tag{79}$$

moyennant quoi l'on a une première condition :

$$\theta(\beta, S_0) = \theta_0 - \beta, \tag{80}$$

pourvu que l'on impose $\beta = 0$ à la pointe.

Par ailleurs, il est clair que, sur le profil, x, y et le rayon de courbure R de ce dernier sont des fonctions connues de β. Mais, d'après la définition de K, l'on a $K = R$ sur le profil.

En définitive, $X(\beta)$ et $Y(\beta)$ étant des fonctions connues dès que la forme du profil est connue; l'on a, outre (80), le système de conditions aux limites suivant sur le profil, dont l'image dans le plan (β, S) est la droite $S = S_0$:

$$\begin{cases} x(\beta, S_0) = X(\beta), & a) \\ y(\beta, S_0) = Y(\beta), & b) \\ K(\beta, S_0) = R(\beta) = \left\{X'^2(\beta) + Y'^2(\beta)\right\}^{1/2} & c) \end{cases} \tag{81}$$

A ces conditions, il convient d'ajouter des conditions aux limites sur l'onde de choc dont l'image dans le plan (β, S) est la courbe inconnue

$$\beta = \beta^* = f(S) \qquad (f(S_0) = 0). \tag{82}$$

D'une part, d'après les conditions de RANKINE-HUGONIOT, les valeurs $\nu^*(S)$, $\theta^*(S)$ de ν et θ sur l'onde choc sont connues en fonction de S, de sorte que l'on a un premier système de conditions aux limites :

$$\text{(83)} \qquad \begin{cases} \nu[f(S), S] = \nu^*(S), \\ \theta[f(S), S] = \theta^*(S). \end{cases}$$

D'autre part, puisque l'on sait, par ailleurs, que les conditions de RANKINE-HUGONIOT forment un système de conditions de CAUCHY pour les équations du mouvement; il est clair que l'une de ces conditions doit apparaître comme une relation entre $f'(S)$ et $(\theta_\beta)^*$, c'est-à-dire comme une relation entre $f'(S)$ et $\mathcal{V}[f(S), S]$. Cette relation est obtenue en éliminant $(\theta_s)^*$ entre les deux relations évidentes suivantes :

$$\text{(84)} \qquad \begin{cases} (\theta_\beta)^* \dfrac{\delta\beta^*}{\delta S} + (\theta_s)^* = \dfrac{\delta\theta^*}{\delta S}, \\ (1-\eta^*)(\theta_\beta)^* \dfrac{\delta\beta^*}{\delta S} - (1+\eta^*)(\theta_s)^* = \dfrac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}(1+\eta^*)\dfrac{\delta p^*}{\delta S}, \end{cases}$$

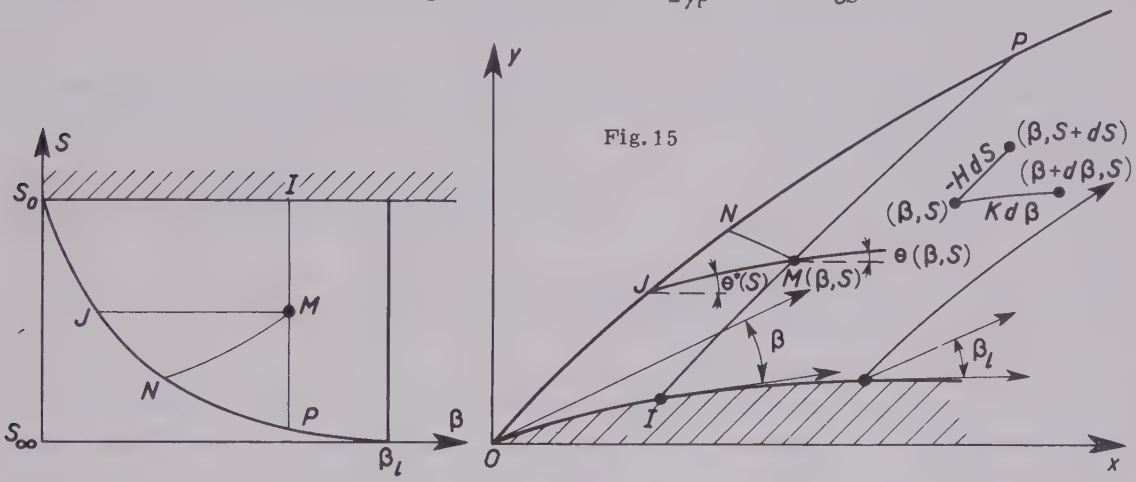


Fig. 15

et cela donne, compte tenu de (66) et (82) :

$$\text{(85)} \qquad 2\,\mathcal{V}[f(S), S]\, f'(S) = \frac{\delta\theta^*}{\delta S} + \frac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\frac{\delta p^*}{\delta S}.$$

D'où, finalement, en utilisant (67 c) et (79), et en posant :

$$\text{(86)} \qquad \phi(S) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\theta^*}{\delta S} + \frac{\sin 2\mu^*}{2\gamma p^*}\frac{\delta p^*}{\delta S}\right),$$

la condition suivante :

$$\text{(87)} \qquad f(S) + (1+\eta[f(S), S_0])\,\phi(S) \cdot \exp\left\{\int_s^{S_0} G[f(S), \Sigma]\,[1-\eta(f(S), \Sigma)]\,d\Sigma\right\} = 0.$$

Une seconde condition relative à l'onde de choc est obtenue en écrivant que tg ω est la pente de l'onde de choc dans le plan physique. En désignant par K^* et H^* les valeurs de K et H sur $\beta = f(S)$ l'on obtient ainsi :

$$\text{(88)} \qquad K^* \sin(\omega - \theta^*) f'(S) + H^* \sin(\theta^* + \mu^* - \omega) = 0.$$

L'équation qui résulte de l'élimination de $(\theta_\beta)^*$ dans (84) n'étant pas distincte de (77); il est possible de se convaincre que (83) (87) et (88) épuisent toutes les conditions aux limites relatives à l'onde de choc.

La considération simultanée des équations (67) et des conditions aux limites (79) et (83) conduit immédiatement aux formules de représentation (91) ci-dessous. Il est clair, d'autre

part, que (70 *a*) conduit à la relation (97 *a*) ci-dessous, et que le système différentiel (69), lequel est intégrable d'après (70) conduit à (96) compte tenu de (81). Lorsqu'il est tenu compte de (31), l'équation (70 *b*) peut être écrite sous la forme :

$$(89)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial S} - \dfrac{\gamma+1}{2}\,\dfrac{H}{\sin\mu\cos^2\mu}\,\mathcal{V} = \dfrac{\gamma+1}{2}\,\eta\,\dfrac{\mathcal{F}H\mathcal{V}}{\sin\mu\cos^2\mu}, \\ \mathcal{F} = \dfrac{4}{\gamma+1}\sin^2\mu\,\cos^2\mu - 1, \end{cases}$$

de sorte que, compte tenu de (81), l'on est conduit à la formule (98) ci-dessous. Enfin, il est clair que l'équation (95) découle directement de (88), compte tenu de (98). De tout ceci résulte alors la proposition suivante :

Le problème de la détermination de l'écoulement derrière l'onde de choc attachée à la pointe d'un profil convexe peut se dissocier en deux problèmes distincts entre lesquels existe un certain couplage par l'intermédiaire de η. *Mais ce couplage est généralement faible car* η *est en général très inférieur à l'unité. Ce couplage est même rigoureusement nul à l'approximation de la méthode de choc-détente pour laquelle* $\eta = 0$.

PREMIER PROBLÈME - Le premier de ces problèmes, qui consiste dans la détermination de l'écoulement dans le plan (β, S) *revient à déterminer la fonction* $f(S)$, *donnant la forme de l'onde de choc, par l'équation :*

$$(90)\qquad \frac{df}{dS} + \Big[1+\eta\big(f(S),S_0\big)\Big]\,\phi(S)\,\exp\left\{\int_S^{S_0} G\big(f(S),\Sigma\big)\Big[1-\eta\big(f(S),\Sigma\big)\Big]d\Sigma\right\} = 0.$$

L'écoulement est alors défini par les formules de représentation :

$$(91)\qquad \begin{cases} \theta(\beta,S) = \theta^*(S) + \displaystyle\int_{f(s)}^{\beta} \mathcal{V}(\beta',S)\big[1+\eta(\beta',S)\big]d\beta', & a) \\ \nu(\beta,S) = \nu^*(S) - \displaystyle\int_{f(s)}^{\beta} \mathcal{V}(\beta',S)\big[1-\eta(\beta',S)\big]d\beta', & b) \\ \mathcal{V}(\beta,S) = -\big[1+\eta(\beta,S_0)\big]^{-1}\exp\left\{\displaystyle\int_{S_0}^{S} G(\beta,\Sigma)\big[1-\eta(\beta,\Sigma)\big]\,d\Sigma\right\}. & c) \end{cases}$$

Si l'on désigne par :

$$(92)\qquad \mu = \mathcal{M}(\nu)$$

la relation inverse de (68 a), la fonction G est donnée par :

$$(93)\qquad G(\beta,S) = -\frac{\gamma-1+2\sin^2[\mu(\beta,S)]}{4\gamma(\gamma-1)C_v\cos^2[\mu(\beta,S)]}\cos[2\mu(\beta,S)],$$

$$(94)\qquad \mu(\beta,S) = \mathcal{M}[\nu(\beta,S)].$$

Enfin, la fonction $\phi(S)$ *est donnée par (86).* Naturellement, il convient de ne pas prendre à la lettre l'affirmation que (90) détermine $f(S)$ car ce n'est pas une équation intégro-différentielle au sens ordinaire, d'une part $G[f(S),S]$ faisant intervenir (91), d'autre part $\eta[f(S),\Sigma]$ faisant intervenir le second problème. Enfin, les formules (91) ne sont pas des formules de solution, mais des formules de représentation.

DEUXIÈME PROBLÈME - Ce deuxième problème, qui consiste dans la reconstitution du plan physique à partir du plan (β, S), *revient, en définitive, à la détermination de la fonction*

$H^*(S)$ par l'équation suivante :

$$H^*(S) + f'(S)\frac{\sin[\omega(S)-\theta^*(S)]}{\sin[\theta^*(S)+\mu^*(S)-\omega(S)]}\cdot\left\{R[f(S)]+\right.$$

(95)

$$\left.+\frac{\gamma+1}{2}\int_{s_0}^{s}H(f(S),\Sigma)\frac{\mathcal{V}(f(S),\Sigma)\left[1+\eta(f(S),\Sigma)\ \mathcal{F}(f(S),\Sigma)\right]}{\sin[\mu(f(S),\Sigma)]\cos^2[\mu(f(S),\Sigma)]}d\Sigma\right\}=0.$$

Dans ces conditions, la reconstitution du plan physique est assurée par les formules de représentation :

$$\begin{cases} x(\beta,S)=X(\beta)-\int_{s_0}^{s}H(\beta,\Sigma)\cos\left[\theta(\beta,\Sigma)+\mu(\beta,\Sigma)\right]d\Sigma, & a)\\ y(\beta,S)=Y(\beta)-\int_{s_0}^{s}H(\beta,\Sigma)\sin\left[\theta(\beta,\Sigma)+\mu(\beta,\Sigma)\right]d\Sigma, & b)\end{cases}$$

(96)

la fonction $H(\beta,S)$ étant définie par les formules :

$$\begin{cases} H(\beta,S)=H^*(S)\,\mathcal{K}(\beta,S), & a)\\ \mathcal{K}(\beta,S)=\left[\frac{p^*(S)}{p(\beta,S)}\right]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}, & b)\\ p(\beta,S)=\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}q_l^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[1-Q^2\left(\nu(\beta,S)\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left(-\frac{S}{(\gamma-1)C_v}\right). & c)\end{cases}$$

(97)

Finalement, la fonction $K(\beta,S)$ qui intervient dans la formule de représentation de η est donnée par :

$$K(\beta,S)=R(\beta)+\frac{\gamma+1}{2}\int_{s_0}^{s}\frac{H(\beta,\Sigma)\,\mathcal{V}(\beta,\Sigma)\left[1+\eta(f(S),\Sigma)\ \mathcal{F}(f(S),\Sigma)\right]}{\sin[\mu(\beta,\Sigma)]\cos^2[\mu(\beta,\Sigma)]}d\Sigma. \qquad (98)$$

Naturellement, il y a lieu de faire les mêmes réserves qu'à propos du premier problème.

COUPLAGE ENTRE LES DEUX PROBLÈMES.

Les deux problèmes énoncés précédemment sont couplés par l'intermédiaire de η pour lequel une formule de représentation a été donnée à la fin du paragraphe précédent.

Construire maintenant un schéma d'approximations successives *formel* est une simple question d'écriture en suivant pas à pas l'énoncé précédent. Disons seulement que la première étape qui sera seule examinée ultérieurement est caractérisée par $\eta = 0$. A chaque étape, le couplage disparaît entre les deux problèmes.

II,2.4. *LA MÉTHODE DE CHOC-DÉTENTE.*

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition analytique précise de la méthode de choc-détente, en disant que la solution d'un problème d'écoulement sur un profil convexe par la méthode de choc détente consiste dans la solution des deux problèmes indépendants suivants.

PREMIER PROBLÈME - Déterminer la fonction $f(S)$ de manière qu'elle vérifie l'équation suivante;

$$\frac{df}{dS} + \phi(S) \exp\left\{\int_s^{s_0} G[f(S), \Sigma]d\Sigma\right\} = 0, \tag{99}$$

la fonction $G(\beta, S)$ étant assujettie à vérifier le système suivant de formules de représentation :

$$\begin{cases} \nu(\beta, S) = \nu^*(S) - \displaystyle\int_{f(s)}^{\beta} \mathcal{V}(\beta', S)d\beta', \\ \mathcal{V}(\beta, S) = -\exp\left\{\displaystyle\int_{s_0}^{s} G(\beta, \Sigma)d\Sigma\right\}, \\ G(\beta, S) = \Gamma[\nu(\beta, S)] = \dfrac{\gamma - 1 + 2\sin^2 \mathcal{M}(\nu)}{4\gamma(\gamma-1)C_v \cos^2 \mathcal{M}(\nu)} \cos[2\,\mathcal{M}(\nu)]. \end{cases} \tag{100}$$

Nous nous proposons de montrer que ce premier problème a effectivement une solution et que cette solution est unique. Cette solution assure la détermination de l'écoulement dans le plan $(\beta\text{-}S)$; elle permet d'aborder le :

DEUXIÈME PROBLÈME - Résoudre l'équation intégrale de VOLTERRA.

$$H^*(S) = L(S) - \int_{s_0}^{s} H^*(\Sigma)\,\Lambda(S, \Sigma)d\Sigma, \tag{101}$$

avec :

$$\begin{cases} L(S) = -f'(S)\dfrac{\sin[\omega(S) - \theta^*(S)]}{\sin[\theta^*(S) + \mu^*(S) - \omega(S)]} R[f(S)], & a) \\ \Lambda(S, \Sigma) = \dfrac{(\gamma+1)f'(S)\sin[\omega(S) - \theta^*(S)]}{2\sin[\mu^*(S) + \theta^*(S) - \omega(S)]} \dfrac{\mathcal{V}(f(S), \Sigma)\left(p^*(\Sigma)/p(f(S), \Sigma)\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}}{\sin[\mu(f(S), \Sigma)]\cos^2[\mu(f(S), \Sigma)]} & b) \end{cases} \tag{102}$$

Ce second problème ne soulève aucune difficulté de principe puisque les fonctions $L(S)$ et $\Lambda(S, \Sigma)$ sont connues par la solution du premier problème, et que ce sont des fonctions continues.

Lorsque les deux problèmes précédents ont été résolus, l'écoulement est parfaitement connu. L'angle θ est donné par :

$$\theta(\beta, S) = \theta^*(S) + \int_{f(s)}^{\beta} \mathcal{V}(\beta', S)d\beta'; \tag{103}$$

les diverses grandeurs thermodynamiques caractéristiques de l'écoulement se déduisent de ν par les formules (68); enfin, la restitution du plan physique s'opère grâce aux formules :

$$\begin{cases} x(\beta, S) = X(\beta) - \displaystyle\int_{s_0}^{s} H(\beta, \Sigma)\cos[\theta(\beta, \Sigma) + \mu(\beta, \Sigma)]d\Sigma, \\ y(\beta, S) = Y(\beta) - \displaystyle\int_{s_0}^{s} H(\beta, \Sigma)\sin[\theta(\beta, \Sigma) + \mu(\beta, \Sigma)]d\Sigma, \\ H(\beta, S) = H^*(S)\,\mathcal{H}(\beta, S) = H^*(S)\left[\dfrac{p^*(S)}{p(\beta, S)}\right]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \end{cases} \tag{104}$$

Il faut donc montrer que le premier problème a une solution unique. La démonstration se fait en deux étapes : en premier lieu, si $f(S)$ est supposée connue les formules (100) définissent parfaitement la fonction $G(\beta, S)$ comme fonctionnelle de $f(S)$; l'équation (99) elle-même est ensuite examinée.

La première opération à effectuer est de changer la variable β en posant :

$$(105)\qquad \begin{cases} \beta = f(S)+\delta, \\ \nu(\beta, S) = \overline{\nu}(\delta, S), \\ \mathcal{V}(\beta, S) = \overline{\mathcal{V}}(\delta, S), \\ G(\beta, S) = \overline{G}(\delta, S) = \Gamma[\overline{\nu}(\delta, S)], \end{cases}$$

et de définir la transformation fonctionnelle $\mathcal{C}(\overline{\nu}, f)$ par :

$$(106)\qquad \mathcal{C}(\overline{\nu}, f) = \nu^*(S)+\int_0^{\delta} d\delta' \exp\left\{-\int_s^{S_0}\Gamma\left[\overline{\nu}(\delta'+f(S)-f(\Sigma), \Sigma\right]d\Sigma\right\}.$$

Il en résulte que $\overline{\nu}_f$ est définie comme fonctionnelle de $f(S)$ par l'équation :

$$(107)\qquad \overline{\nu}_f = \mathcal{C}(\overline{\nu}_f; f).$$

La solution de cette équation est obtenue par le procédé d'approximations successives suivant :

$$(108)\qquad \begin{cases} \overline{\nu}_f^{(0)} = \nu^*(S)+\delta, \\ \overline{\nu}_f^{(n+1)} = \mathcal{C}(\nu_f^{(n)}; f), \end{cases}$$

dont la convergence est analogue à celle du procédé habituel dans la théorie de l'équation intégrale de VOLTERRA, comme nous allons le voir.

G est positif dès que $M > \sqrt{2}$; soient μ_0 et ν_0 les valeurs correspondantes, nous supposerons que :

$$(109)\qquad \nu_0^*(S) \geqslant \nu_0$$

de sorte que, dans toutes les formules précédentes $\Gamma > 0$. Dans ces conditions, (106) montre que :

$$(110)\qquad |\mathcal{C}(\nu''; f) - \mathcal{C}(\nu'; f)| \leqslant \mathrm{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| \int_0^{\delta} d\delta' \int_s^{S_0} |\nu''-\nu'|\, d\Sigma.$$

Mais l'on a évidemment :

$$(111)\qquad |\nu^{(1)}-\nu^{(0)}| \leqslant (\mathrm{Max}\,\Gamma)(S_0 - S)\delta,$$

de sorte que, en posant :

$$(112)\qquad K_1 = \mathrm{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|, \quad K_2 = \mathrm{Max}\,\Gamma,$$

il vient :

$$(113)\qquad |\nu^{(n+1)}-\nu^{(n)}| \leqslant K_2 K_1^n \frac{\delta^{n+1}(S_0-S)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}.$$

L'existence et l'unicité de la solution de (107) sont donc assurées. Cela définit parfaitement $\nu_f(\beta, S)$ comme fonctionnelle de $f(S)$ et, par voie de conséquence, $G_f(\beta, S)$ est également définie comme fonctionnelle de $f(S)$. Enfin la continuité est manifestement assurée.

Pour déterminer la fonction $f(S)$ à l'aide de l'équation (99), les notations (105) sont conservées et on note $\overline{\nu}_f(\delta, S)$ la fonction correspondant à $\nu_f(\beta, S)$. Une nouvelle transformation fonctionnelle est définie :

$$(114)\qquad \Theta[f(S)] = \int_s^{S_0} \phi(\Sigma) \exp\left\{\int_{\Sigma}^{S_0} \Gamma\left[\overline{\nu}_f\left(f(\Sigma) - f(\Sigma'), \Sigma'\right)\right] d\Sigma'\right\} d\Sigma,$$

et il s'agit de montrer que le procédé d'approximations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} f^{(0)}(S) = \int_{s}^{s_0} \phi(\Sigma)\, d\Sigma, \\ f^{(n+1)}(S) = \Theta[f^{(n)}(S)], \end{array}\right. \tag{115}$$

donne la solution de l'équation :

$$f(S) = \Theta[f(S)], \tag{116}$$

et que cette solution est unique.

On commence par remarquer que toutes les fonctions (115) vérifient

$$f^{(n)}(S) \leqslant e^{(s_0 - s)(\mathrm{Max}\,\Gamma)} f^{(0)}(S), \tag{117}$$

et cela montre que l'application du procédé (116) ne nécessite jamais la connaissance de $\overline{\nu}_f(\delta, S)$ que dans un domaine contenu dans le domaine :

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 \leqslant S \leqslant S_0, \\ 0 \leqslant \delta \leqslant A(S_1) - A(S), \\ A(S) = f^{(0)}(S)\ \exp\,[(S_0 - S)(\mathrm{Max}\,P)], \end{array}\right\} \mathcal{R}(S_0, S_1) \tag{118}$$

si l'on désire calculer une $f^{(n)}_{(s)}$ quelconque dans $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$. Comme la première étape de la démonstration est naturellement de majorer $|\Theta(f'') - \Theta(f')|$, il est clair, d'après ce qui précède, que l'expression :

$$\Delta_{f'', f'}(S) = \mathrm{Max}_{\delta} |\overline{\nu}_{f''}(\delta, S) - \overline{\nu}_{f'}(\delta, S)|, \quad \big(0 \leqslant \delta \leqslant A(S_1) - A(S)\big) \tag{119}$$

doit jouer un rôle important. Effectivement, soient $f'(S)$ et $f''(S)$ deux fonctions continues –par exemple deux fonctions $f^{(n)}(S)$ – définies sur le segment :

$$S_1 \leqslant S \leqslant S_0, \quad \big(I(S_0, S_1)\big) \tag{120}$$

vérifiant (117), l'on a :

$$\begin{aligned} |\Theta(f''(S)) - \Theta(f'(S))| \leqslant \mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| e^{(s_0 - s_1)\mathrm{Max}\,\Gamma} \cdot \\ \cdot \int_{s}^{s_0} \phi(\Sigma) d\Sigma \int_{\Sigma}^{s_0} |\overline{\nu}_{f''}(f''(\Sigma) - f''(\Sigma'), \Sigma) - \overline{\nu}_{f'}(f'(\Sigma) - f'(\Sigma'), \Sigma')| d\Sigma', \end{aligned} \tag{121}$$

de sorte que, compte tenu de - voir (106) et (107) -

$$|\overline{\nu}_{f''}(\delta'', S) - \overline{\nu}_{f'}(\delta', S)| \leqslant |\overline{\nu}_{f''}(\delta'', S) - \overline{\nu}_{f'}(\delta'', S)| + |\delta'' - \delta'|, \tag{122}$$

il vient :

$$\begin{aligned} |\Theta(f''(S)) - \Theta(f'(S))| \leqslant \mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| e^{(s_0 - s_1)\mathrm{Max}\,\Gamma} \left\{ \int_{s}^{s_0} (S_0 - \Sigma)\, \phi(\Sigma)\, |f''(\Sigma) - f'(\Sigma)| d\Sigma + \right. \\ \left. + \int_{s}^{s_0} \phi(\Sigma) d\Sigma \int_{\Sigma}^{s_0} |f''(\Sigma') - f'(\Sigma')| d\Sigma' + \int_{s}^{s_0} \phi(\Sigma) d\Sigma \int_{\Sigma}^{s_0} |\overline{\nu}_{f''}(f''(\Sigma) - f''(\Sigma'), \Sigma') - \overline{\nu}_{f'}(f''(\Sigma) - f''(\Sigma'), \Sigma')| d\Sigma' \right\}, \end{aligned} \tag{123}$$

et c'est précisément dans l'obtention d'une majoration pour le dernier terme que va intervenir l'expression (119). En effet, d'après (107) :

$$|\overline{\nu}_{f''}(\delta, S) - \overline{\nu}_{f'}(\delta, S)| \leqslant \left(\mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right) \int_{0}^{\delta} d\delta' \cdot \int_{s}^{s_0} |\nu_{f''}(\delta' + f''(S) - f''(\Sigma), \Sigma) - \overline{\nu}_{f'}(\delta' + f'(S) - f'(\Sigma), \Sigma)| d\Sigma, \tag{124}$$

et l'inégalité (122) montre que :

$$\begin{aligned} |\overline{\nu}_{f''}(\delta, S) - \overline{\nu}_{f'}(\delta, S)| \leqslant \left(\mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right) \int_{0}^{\delta} d\delta' \int_{s}^{s_0} d\Sigma \cdot \\ \cdot \left\{ |\overline{\nu}_{f''}(\delta' + f''(S) - f''(\Sigma), \Sigma) - \overline{\nu}_{f'}(\delta' + f''(S) - f''(\Sigma), \Sigma)| + |f''(S) - f'(S)| + |f''(\Sigma) - f'(\Sigma)| \right\}; \end{aligned} \tag{125}$$

or, il est clair que si le point (δ, S) appartient au domaine $\mathcal{R}(S_0, S_1)$, il en est de même de tous les points $(\delta' + f''(S) - f'(\Sigma), \Sigma)$ avec $0 \leqslant \delta' \leqslant \delta$, $S_1 \leqslant \Sigma \leqslant S_0$, de sorte que, avec (119), (125) s'écrit :

$$\Delta_{f'',f'}(S) \leqslant A(S_1)\left(\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)\cdot\left\{\int_S^{S_0}\Delta_{f'',f'}(\Sigma)d\Sigma + (S_0 - S)|f''(S) - f'(S)| + \int_S^{S_0}|f''(\Sigma) - f'(\Sigma)|d\Sigma\right\}. \tag{126}$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer que l'inégalité (126) entraîne :

$$\begin{aligned}\Delta_{f'',f'}(S) \leqslant\ & A(S_1)\ \operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\ \left\{(S_0 - S)|f''(S) - f'(S)| + \int_S^{S_0}|f''(\Sigma) - f'(\Sigma)|d\Sigma + \right.\\ & \left. A(S_1)\ \operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| e^{A(s_1)(s_0 - s_1)\left(\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)}\left[\int_S^{S_0}(S_0 - \Sigma)\,|f''(\Sigma) - f'(\Sigma)|d\Sigma + \int_S^{S_0}d\Sigma\int_\Sigma^{S_0}|f''(\Sigma') - f'(\Sigma')|d\Sigma'\right]\right\}.\end{aligned} \tag{127}$$

Finalement, en majorant la dernière intégrale du second membre de (123) à l'aide de (119) et (127), il vient :

$$\begin{aligned}|\Theta(f''(S)) - \Theta(f'(S))| \leqslant\ & \operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| e^{(s_0 - s_1)\operatorname{Max}\Gamma}\int_S^{S_0}\phi(\Sigma)d\Sigma\left\{(S_0 - \Sigma)|f''(\Sigma') - f'(\Sigma)| + \right.\\ & + \int_\Sigma^{S_0}|f''(\Sigma') - f'(\Sigma')|d\Sigma' + A(S_1)\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\left[\int_\Sigma^{S_0}(S_0 - \Sigma')\,|f''(\Sigma') - f'(\Sigma')|\,d\Sigma' + \right.\\ & \left. + \int_\Sigma^{S_0}d\Sigma'\int_{\Sigma'}^{S_0}|f''(\Sigma'') - f''(\Sigma'')|d\Sigma''\right] + \left(A(S_1)\ \operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)^2 e^{(s_0 - s_1)A(s_1)\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|}\cdot\\ & \left.\cdot\left[\int_\Sigma^{S_0}d\Sigma'\int_{\Sigma'}^{S_0}(S_0 - \Sigma'')|f''(\Sigma'') - f'(\Sigma'')|d\Sigma'' + \int_\Sigma^{S_0}d\Sigma'\int_{\Sigma'}^{S_0}d\Sigma''\int_{\Sigma''}^{S_0}|f''(\Sigma''') - f'(\Sigma''')|d\Sigma'''\right]\right\}.\end{aligned} \tag{128}$$

La fonction $\phi(S)$ n'est pas bornée au vois nage $S = S_\infty$, mais elle l'est dans tout l'intervalle (120) pourvu que :

$$S_1 > S_\infty \tag{129}$$

condition que nous supposerons vérifiée. Dans ces conditions, l'inégalité (128) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}|\Theta(f''(S)) - \Theta(f'(S))| \leqslant\ & \operatorname*{Max}_{S_1 \leqslant \Sigma \leqslant S}\left(\phi(\Sigma)\right)\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| e^{(s_0 - s_1)(\operatorname{Max}\Gamma)}\left\{(S_0 - S_1)\int_S^{S_0}|f''(\Sigma) - f'(\Sigma)|\,d\Sigma + \right.\\ & + \left[1 + (S_0 - S_1)A(S_1)\left(\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)\right]\int_S^{S_0}d\Sigma\int_\Sigma^{S_0}|f''(\Sigma') - f'(\Sigma')|d\Sigma' + A(S_1)\ \operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\cdot\\ & \cdot\left(1 + (S_0 - S_1)A(S_1)\left(\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)e^{(s_0 - s_1)A(s_1)\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|}\right)\cdot\int_S^{S_0}d\Sigma\int_\Sigma^{S_0}d\Sigma'\int_{\Sigma'}^{S_0}|f''(\Sigma'') - f'(\Sigma'')|\,d\Sigma'' + \\ & \left. + \left(A(S_1)\left(\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)\right)^2 e^{(s_0 - s_1)A(s_1)\left(\operatorname{Max}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|\right)}\cdot\int_S^{S_0}d\Sigma\int_\Sigma^{S_0}d\Sigma'\int_{\Sigma'}^{S_0}d\Sigma''\int_{\Sigma''}^{S_0}|f''(\Sigma''') - f'(\Sigma''')|d\Sigma''\right\}.\end{aligned} \tag{130}$$

Avec cette dernière majoration, il est maintenant facile de démon rer la convergence de (115) dans (120) moyennant (129). En effet, l'on a d'abord :

$$f^{(1)}(S) - f^{(0)}(S) \leqslant (S_0 - S_1)A(S_1)\ \operatorname{Max}(\Gamma) = B(S_1), \tag{131}$$

de sorte que, en appliquant (130) à (115), il vient, par récurrence :

$$|f^{(n+1)}(S) - f^{(n)}(S)| \leqslant \frac{B(S_1)[K(S_0, S_1)(S_0 - S)]^n}{n!}. \tag{132}$$

Il suffit en effet de remarquer que :

$$\int_S^{S_0} d\Sigma_1 \int_{\Sigma_1}^{S_0} d\Sigma_2 \cdots \int_{\Sigma_p}^{S_0} \frac{(S_0 - \Sigma)^n}{n!} d\Sigma \leqslant (S_0 - S_1)^p \frac{(S_0 - S)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{133}$$

et l'on trouve ainsi :

$$K(S_0, S_1) = \underset{S_1 \leqslant S \leqslant S_0}{2\,\mathrm{Max}} |\phi(S)| \,\mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| e^{(s_0 - s_1)\,\mathrm{Max}\,\Gamma} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (S_0 - S_1) + (S_0 - S_1)^2 A(S_1) \,\mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| + (S_0 - S_1)^3 \cdot \left(A(S_1) \,\mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| \right)^2 e^{(s_0 - s_1) A(s_1) \,\mathrm{Max}\, \left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|} \right\}. \tag{134}$$

La majoration (132) suffit à établir l'existence de la solution de (116) dans l'intervalle ouvert

$$S_\infty \leqslant S \leqslant S_0. \tag{135}$$

L'unicité de cette solution se démontre comme dans la théorie de l'équation intégrale de VOLTERRA.

Il vient donc d'être établi que le premier problème, tel qu'il a été énoncé au début de ce paragraphe, admet une solution et, une seule dans le domaine ouvert

$$\begin{cases} S_1 < S \leqslant S_0, \\ f(S) \leqslant \underline{\beta}. \end{cases} \tag{136}$$

Cette solution est définie par la fonction $f(S)$ solution de (116) et par la fonction :

$$\nu(\beta, S) = \overline{\nu_f}[\beta - f(S), S], \tag{137}$$

d'autre part. Ces deux fonctions sont manifestement continues puisqu'elles sont limites uniformes de fonctions continues. Il est même probable qu'elles sont indéfiniment dérivables et peut-être analytiques, mais ces dernières propriétés n'ont aucun rôle à jouer par la suite.

Les deux fonctions précédentes définissent complètement l'écoulement dans le plan (β, S) puisque la masse spécifique, la pression et la vitesse se déduisent de $\nu(\beta, S)$, et que, par ailleurs, l'angle d'inclinaison θ du vecteur vitesse est obtenu par :

$$\theta(\beta, S) + \nu(\beta, S) = \theta^*(S) + \nu^*(S). \tag{138}$$

Finalement, grâce à (99), la continuité de $f(S)$ et de $\nu(\beta, S)$, entraîne celle du noyau $\Lambda(S, \Sigma)$ de l'équation (101) qui ne fait donc aucune difficulté et possède ainsi une solution unique. En définitive, l'existence et l'unicité de l'écoulement sur un profil convexe sont obtenus dans le cadre de la méthode de choc-détente.

Une dernière remarque à propos de la construction de l'écoulement exact par le schéma d'approximations successives (1.3.). L'étape (1.3.*a*) est effective comme on vient de le voir. Mais il est évident que l'étape (1.3.*b*) est exactement analogue à (1.3.*a*), d'où résulte que cette étape (1.3.*b*) est également effective. Comme (1.3.*c*) ne pose aucun problème, il est ainsi établi que le schéma (1.3) est plus que formel, il est effectif. Quant à la convergence, elle paraît bien difficile à établir en raison de la complexité du couplage réalisé par (1.3.*c*).

II, 3. APPLICATIONS.

II,3.1. *LA MÉTHODE CHOC-DÉTENTE EN THÉORIE HYPERSONIQUE DES PETITES PERTURBATIONS.*

Les formules (2.99) et (2.100) ne sont pas des formules de solution, comme on l'a déjà remarqué; cela fait perdre beaucoup d'intérêt pratique à la méthode. Mais il est clair que toute la difficulté provient du fait que G varie dans le champ, et cette difficulté disparaît en théorie hypersonique des petites perturbations, car l'on peut alors faire l'hypothèse que μ est très inférieur à l'unité, et remplacer G par une valeur constante : celle qu'il prend pour $\mu = 0$. Ainsi l'on est conduit à adopter :

$$G = \frac{1}{4\gamma C_v}. \tag{1}$$

Dans ces conditions, le premier problème du § 2.4. est tout résolu par les formules :

$$\begin{cases} \mathcal{V}(\beta, S) = -\exp\left(\dfrac{S-S_o}{4\gamma C_v}\right), \\ \theta(\beta, S) = \theta^*(S) - [\beta - f(S)] \exp\left(\dfrac{S-S_o}{4\gamma C_v}\right), \\ \nu(\beta, S) = \nu^*(S) + [\beta - f(S)] \exp\left(\dfrac{S-S_o}{4\gamma C_v}\right), \end{cases} \tag{2}$$

la fonction $f(S)$ étant donnée par :

$$f(S) = [\psi(S_o) - \psi(S)] \exp\left(\frac{S_o}{4\gamma C_v}\right), \tag{3}$$

si l'on définit $\psi(S)$ par :

$$\frac{d\psi}{dS} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta^*}{dS} + \frac{\mu^*}{\gamma p^*}\frac{dp^*}{dS}\right) \exp\left(-\frac{S}{4\gamma C_v}\right). \tag{4}$$

La solution du premier problème est alors complète. En ce qui concerne le second problème; il n'y a pas de simplification tenant à la théorie des petites perturbations. Le nœud de la question est la résolution de l'équation intégrale de VOLTERRA :

$$H^*(S) = L(S) + \int_S^{S_o} H^*(\Sigma)\, \Lambda(S, \Sigma)\, d\Sigma, \tag{5}$$

avec

$$\begin{cases} L(S) = \dfrac{1}{2} R[f(S)] \dfrac{\omega(S) - \theta^*(S)}{\mu^*(S) + \theta^*(S) - \omega(S)} \left(\dfrac{d\theta^*}{dS} + \dfrac{\mu^*(S)}{\gamma p^*(S)}\dfrac{dp^*}{dS}\right) \exp\left(\dfrac{S_o - S}{4\gamma C_v}\right), \\ \Lambda(S, \Sigma) = \dfrac{\gamma+1}{4} \dfrac{\omega(S) - \theta^*(S)}{\mu^*(S) + \theta^*(S) - \omega(S)} \cdot \left(\dfrac{d\theta^*}{dS} + \dfrac{\mu^*(S)}{\gamma p^*(S)}\dfrac{dp^*}{dS}\right) \dfrac{\mathcal{R}(f(S), \Sigma)}{\mu(f(S), \Sigma)} \exp\left(\dfrac{\Sigma - S}{4\gamma C_v}\right), \end{cases} \tag{6}$$

où :

$$\mathcal{R}(\beta, S) = \left(\frac{p^*(S)}{p(\beta, S)}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \tag{7}$$

Lorsque la solution de l'équation (5) a été obtenue, la restitution du plan physique s'effectue grâce aux formules :

$$\begin{cases} x(\beta, S) = X(\beta) + \displaystyle\int_S^{S_o} H(\beta, \Sigma) d\Sigma, \\ y(\beta, S) = Y(\beta) + \displaystyle\int_S^{S_o} H(\beta, S)[\theta(\beta, \Sigma) + \mu(\beta, \Sigma)] d\Sigma, \end{cases} \tag{8}$$

avec :

$$H(\beta, S) = H^*(S)\,\mathcal{K}(\beta, S). \tag{9}$$

L'équation de l'onde de choc dans le plan physique s'obtient évidemment en faisant $\beta = f(S)$ dans les formules (8). Mais il est clair que l'on peut aussi utiliser les formules :

$$\begin{aligned} x[f(S), S] = x^*(S) &= \int_s^{s_0} \frac{H^*(\Sigma)\,\mu^*(\Sigma)}{\omega(\Sigma) - \theta^*(\Sigma)}\, d\Sigma, \\ y[f(S), S] = y^*(S) &= \int_s^{s_0} \frac{H^*(\Sigma)\,\mu^*(\Sigma)\omega(\Sigma)}{\omega(\Sigma) - \theta^*(\Sigma)}\, d\Sigma, \end{aligned} \tag{10}$$

qui résultent de :

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{dS} = \dfrac{\sin \mu^*}{\sin(\omega - \theta^*)}\, \dfrac{\cos \mu^*}{\cos(\theta^* + \mu^*)} \left(\dfrac{\partial x}{\partial S}\right)^* \\ \dfrac{dy^*}{dS} = \operatorname{tg} \omega\, \dfrac{dx^*}{dS}. \end{cases} \tag{11}$$

II, 3.2. *RÉSOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE VOLTERRA DU SECOND PROBLÈME.*

Bien que, du point de vue théorique, la résolution de l'équation de VOLTERRA (5) ne présente pas la moindre difficulté, il est clair qu'il serait, pratiquement, d'un grand intérêt de disposer d'une solution explicite, même si cette solution n'est qu'approchée. Cela est possible si le noyau $\Lambda(S, \Sigma)$ se décompose :

$$\Lambda(S, \Sigma) = \Lambda_1(S)\Lambda_2(\Sigma). \tag{12}$$

En effet, si l'on pose :

$$U(S) = \exp\left\{\int^S \Lambda_1(\Sigma)\Lambda_2(\Sigma)\, d\Sigma\right\}, \tag{13}$$

la solution de l'équation (5) est alors donnée par :

$$H^*(S) = L(S) + \frac{\Lambda_1(S)}{U(S)} \int_s^{s_0} U(\Sigma)\Lambda_2(\Sigma)L(\Sigma)\, d\Sigma. \tag{14}$$

Voyons donc si (12) peut être considéré comme une approximation légitime. Il suffit pour cela que chacune des fonctions $\mathcal{K}(f(S), \Sigma)$ et $\mu(f(S), \Sigma)$ puisse être considérée comme le produit d'une fonction de S et d'une fonction de Σ. En ce qui concerne $\mathcal{K}(f(S), \Sigma)$ cela est assuré si l'on peut adopter l'approximation :

$$p(\beta, S) = p(\beta) \tag{15}$$

c'est-à-dire si l'on peut considérer la pression comme constante sur les caractéristiques (C_+). Il est clair que ceci est une approximation légitime si $\eta \ll 1$; l'on a alors :

$$\mathcal{K}(f(S), \Sigma) = \left(\frac{p^*(\Sigma)}{p^*(S)}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \tag{16}$$

En ce qui concerne μ, reportons-nous à l'équation (2.14), avec la même approximation (15) et avec $\mu \ll 1$, l'on a :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial S} = \frac{1}{2\gamma C_v}, \tag{17}$$

soit :

$$\frac{1}{\mu[f(S), \Sigma]} = \frac{1}{\mu^*(S)} \exp\left(\frac{S - \Sigma}{2\gamma C_v}\right). \tag{18}$$

Finalement, il vient (12) avec :

$$\begin{cases} \Lambda_1(S) = \dfrac{\gamma+1}{4}\, \dfrac{\omega(S) - \theta^*(S)}{\mu^*(S) + \theta^*(S) - \omega(S)} \left(\dfrac{d\theta^*}{dS} + \dfrac{\mu^*(S)}{\gamma p^*(S)}\, \dfrac{dp^*}{dS}\right) \cdot \dfrac{\exp(S/4\gamma C_v)}{\mu^*(S)\left(\dfrac{p^*(S)}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}}. \\ \Lambda_2(\Sigma) = \left(\dfrac{p^*(\Sigma)}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \exp(-\Sigma/4\gamma C_v). \end{cases} \tag{19}$$

II, 3.3. *NOUVELLE FORMULATION.*

Le paramétrage (β, S) qui a été utilisé jusqu'ici est intéressant du point de vue théorique, mais il est plus pratique de substituer à S le paramètre hypersonique basé sur la pente de l'onde de choc

$$K = M_\infty \omega(S). \tag{20}$$

Il vient à un facteur constant près qui ne joue aucun rôle

$$\exp\left(\frac{S}{4\gamma C_v}\right) = \phi(K) = \frac{[2\gamma K^2 - (\gamma-1)]^{\frac{1}{4\gamma}} [(\gamma-1)K^2+2]^{\frac{1}{4}}}{(\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{4\gamma}} K^{\frac{1}{2}}}. \tag{21}$$

Mais β est $0\left(\frac{1}{M_\infty}\right)$, alors que R est $0(M_\infty)$, il faut donc poser :

$$\begin{cases} f(S, S_0) = \dfrac{1}{M_\infty} \bar{f}(K, K_0), \\ R[f(S, S_0)] = M_\infty \bar{R}[\bar{f}(K, K_0)]; \end{cases} \tag{22}$$

alors, en introduisant la fonction :

$$\bar{\psi}(K) = \frac{1}{\gamma+1} \int_1^K \left(1 + \frac{1}{t^2} + 2\sqrt{\frac{(\gamma-1)t^2+2}{2\gamma t^2-(\gamma-1)}}\right) \frac{dt}{\phi(t)}, \tag{23}$$

la formule (3) devient :

$$\bar{f}(K, K_0) = \phi(K_0)(\bar{\psi}(K_0) - \bar{\psi}(K). \tag{24}$$

Maintenant, pour se conformer aux notations de la théorie des petites perturbations, il faut poser :

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{M_\infty} \bar{\beta}, \\ \mu = \dfrac{1}{M_\infty} \bar{\mu}; \end{cases} \tag{25}$$

puis, en désignant par :

$$\nu_l = \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right) \pi/2, \tag{26}$$

la valeur de ν correspondant à $\mu = 0$, l'on a :

$$\nu = \nu_l - \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_\infty} \bar{\mu} + 0\left(\frac{1}{M_\infty^3}\right), \tag{27}$$

de sorte que, compte tenu de :

$$\begin{aligned} \theta^*(S) &= \frac{2}{\gamma+1}\left(K - \frac{1}{K}\right), \\ \mu^*(S) &= \frac{\sqrt{[2\gamma K^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)K^2+2]}}{(\gamma+1)K}, \end{aligned} \tag{28}$$

il vient, au lieu de (2) :

$$\begin{cases} \theta(\bar{\beta}, K) = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(K - \dfrac{1}{K}\right) - [\bar{\beta} - \bar{f}(K, K_0)] \dfrac{\phi(K)}{\phi(K_0)}, \\ \bar{\mu}(\bar{\beta}, K) = \dfrac{\sqrt{[2\gamma K^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)K^2+2]}}{(\gamma+1)K} - \dfrac{\gamma-1}{2}[\bar{\beta} - \bar{f}(K, K_0)] \dfrac{\phi(K)}{\phi(K_0)}. \end{cases} \tag{29}$$

En théorie hypersonique des petites perturbations, $p/\rho\mu^2$ est une constante le long de chaque ligne de courant, de même que $p\rho^{-\gamma}$, de sorte que :

$$p(\bar{\beta}, K) = p^*(\bar{\beta}, K)\left(\frac{\bar{\mu}(\bar{\beta}, K)}{\mu^*(K)}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \tag{30}$$

et (29) donne :

$$(31)\qquad p(\bar\beta,K)=p_\infty\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}K^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\cdot\left\{1-\frac{\gamma^2-1}{2\phi(K_o)}\frac{K\phi(K)[\bar\beta-\bar f(K,K_o)]}{\sqrt{[2\gamma K^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)K^2+2]}}\right\}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

La masse spécifique est donc :

$$(32)\qquad \rho(\bar\beta,K)=\rho_\infty\frac{(\gamma+1)K^2}{(\gamma-1)K^2+2}\left\{1-\frac{\gamma^2-1}{2\phi(K_o)}\frac{K\phi(K)[\bar\beta-\bar f(K,K_o)]}{\sqrt{[2\gamma K^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)K^2+2]}}\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

et l'entropie spécifique :

$$(33)\qquad S=S_\infty+4\gamma C_v\ \mathrm{Log}\ \phi(K).$$

La restitution du plan physique n'offre aucune difficulté si l'on utilise (14). Après quelques calculs, faciles mais un peu longs, l'on obtient :

$$(34)\qquad H^*(S)dS=\phi(K_o)\,\overline{H}^*(K,K_o)dK,$$

avec

$$(35)\qquad \overline{H}^*(K,K_o)=\overline{R}[\bar f(K,K_o)]\ \mathcal{L}(K)+\frac{\mathcal{M}(K)}{\mathcal{U}(K)}\int_K^{K_o}\mathcal{U}(t)\mathcal{N}(t)\,\overline{R}[\bar f(t,K_o)]\,dt,$$

et les fonctions $\mathcal{L}(K),\mathcal{M}(K),\ \mathcal{N}(K),\ \mathcal{U}(K)$, qui ne dépendent que de K, sont données par les formules :

$$(36)\qquad \begin{cases}
\phi(K)\ \mathcal{L}(K)=\dfrac{1+\frac{1}{K^2}+2\sqrt{\dfrac{(\gamma-1)K^2+2}{2\gamma K^2-(\gamma-1)}}}{(\gamma+1)\left\{\sqrt{\dfrac{2\gamma K^2-(\gamma-1)}{(\gamma-1)K^2+2}}-1\right\}},\\[2ex]
\mathcal{M}(K)=\dfrac{1}{2}\ \dfrac{(\gamma+1)^2K\,\mathcal{L}(K)\phi^2(K)}{[2\gamma K^2-(\gamma-1)]^{\frac12}[(\gamma-1)K^2+2]^{\frac12}\left(\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}K^2-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}},\\[2ex]
\mathcal{N}(K)=\left(\dfrac{2\gamma K^2}{\gamma+1}-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\ \dfrac{\mathcal{L}(K)}{\phi(K)},\\[2ex]
\mathcal{U}(K)=\left(\sqrt{\dfrac{(\gamma-1)K^2+2}{2\gamma K^2-(\gamma-1)}}-1\right)^2\left(\sqrt{\dfrac{(\gamma-1)K^2+2}{2\gamma K^2-(\gamma-1)}}-\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)^{-\frac{4\gamma-2+3\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{8\gamma}}\cdot\\[2ex]
\cdot\left(\sqrt{\dfrac{(\gamma-1)K^2+2}{2\gamma K^2-(\gamma-1)}}+\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)^{\frac{3\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}-4\gamma+2}{8\gamma}}\cdot\\[2ex]
\cdot\left(\dfrac{(\gamma-1)K^2+2}{2\gamma K^2-(\gamma-1)}+\dfrac{2}{\gamma-1}\right)^{-\frac14}\exp\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2(\gamma-1)}}\cdot\mathrm{Artg}\left(\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2}}\dfrac{(\gamma-1)K^2+2}{2\gamma K^2-(\gamma-1)}\right)\right\}.
\end{cases}$$

La fonction $\bar f(K,K_o)$ est monotone sur $[1,K_o]$, la relation

$$(37)\qquad \bar\beta=\bar f(K,K_o),$$

s'inverse donc sous la forme :

$$(38)\qquad K=\bar g(\bar\beta,K_o),$$

et, conformément à l'approximation (15), l'expression (7) s'écrit :

$$\mathcal{K}(\beta, S) = \left(\frac{2\gamma K^2 - (\gamma - 1)}{2\gamma \bar{g}^2(\bar{\beta}, K_0) - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}, \tag{39}$$

de sorte que, après avoir posé :

$$\begin{cases} x(\beta, S) = x(\bar{\beta}, K), \\ M_\infty\, y(\beta, S) = \bar{y}(\bar{\beta}, K), \\ X(\beta) = \bar{X}(\bar{\beta}), \\ M_\infty\, Y(\beta) = \bar{Y}(\bar{\beta}), \end{cases} \tag{40}$$

la restitution du plan physique est assurée par les formules suivantes, qui sont déduites de (8) :

$$\begin{cases} \bar{x}(\beta, K) = \bar{X}(\bar{\beta}) + \dfrac{\phi(K_0)}{[2\gamma \bar{g}^2(\bar{\beta}, K_0) - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}} \cdot \displaystyle\int_K^{K_0} \bar{H}^*(t, K_0)[2\gamma t^2 - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\, dt, \\ \bar{y}(\bar{\beta}, K) = \bar{Y}(\bar{\beta}) + \dfrac{\phi(K_0)}{[2\gamma \bar{g}^2(\bar{\beta}, K_0) - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}} \cdot \\ \qquad \cdot \displaystyle\int_K^{K_0} \bar{H}^*(t, K_0)[2\gamma t^2 - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} [\bar{\theta}(\beta, t) + \bar{\mu}(\bar{\beta}, t)]\, dt. \end{cases} \tag{41}$$

Résumons les résultats obtenus dans un énoncé.

En théorie hypersonique des petites perturbations, la méthode choc-détente conduit à une représentation paramétrique entièrement explicite de l'écoulement. Les paramètres dont le choix s'impose naturellement sont, d'une part le produit $K = M_\infty \omega$ *du nombre de Mach amont par la pente de l'onde choc au point où elle est rencontrée par la ligne de courant* - ce premier paramètre K est constant sur les lignes de courant - *d'autre part, le produit* $\bar{\beta} = M_\infty \beta$ *du nombre de Mach amont par l'angle formé entre la tangente au nez du profil et la tangente au point de ce dernier où il est rencontré par la ligne de Mach montante.* –ce deuxième paramètre est constant sur les lignes de Mach montantes–. *La représentation paramétrique en question fait intervenir 6 fonctions universelles de* K –universelles en ce sens que leur définition ne dépend pas du profil– $\phi(K)$, $\bar{\psi}(K)$, $\mathcal{L}(K), \mathcal{M}(K), \mathcal{N}(K), \mathcal{U}(K)$ *dont les définitions sont données par les formules (21) (23) (36). Soit alors* ω_0 *la pente de l'onde de choc attachée à la pointe, et* $K_0 = M_\infty \omega_0$; *l'image dans le plan* $(\bar{\beta}, K)$ *du profil est la demi-droite* $K = K_0$. $\bar{\beta} \geqslant 0$, *alors que l'image de l'onde de choc de tête est la courbe*

$$\bar{\beta} = \bar{f}(K, K_0) = \phi(K_0)[\bar{\psi}(K_0) - \bar{\psi}(K)]; \tag{42}$$

seul d'ailleurs le domaine mixtiligne hachuré de la figure 16, qui est limité vers la droite par :

$$\bar{\beta}_l = \bar{f}(1, K_0), \tag{43}$$

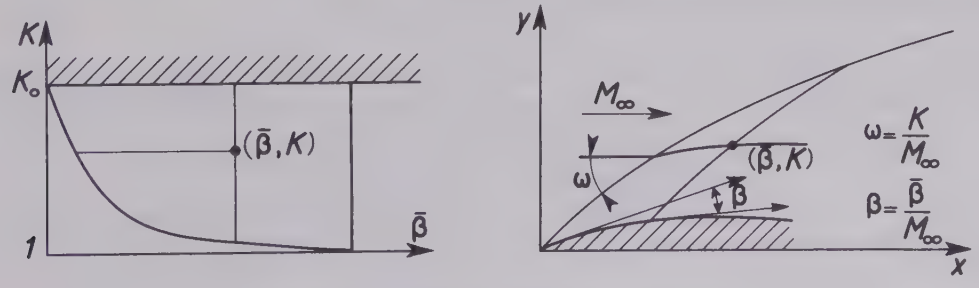


Fig. 16 - La méthode de choc-détente en théorie des petites perturbations.

est couvert par la représentation en question. La pente des lignes de courant $\theta(\bar\beta, K)$, *l'angle de Mach* $\mu(\bar\beta, K)$, *la pression* $p(\bar\beta, K)$ *et la masse spécifique* $\rho(\bar\beta, K)$, *sont données par les formules :*

$$(44)\quad \begin{cases} M_\infty \theta(\bar\beta, K) = \bar\theta(\bar\beta, K) = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(K - \dfrac{1}{K}\right) - [\bar\beta - \bar f(K, K_0)]\,\phi(K)/\phi(K_0), \\ M_\infty \mu(\bar\beta, K) = \bar\mu(\bar\beta, K) = \dfrac{\sqrt{[2\gamma K^2 - (\gamma-1)]\,[(\gamma-1)K^2+2]}}{(\gamma+1)K} - \dfrac{\gamma-1}{2}[\bar\beta - \bar f(K, K_0)]\dfrac{\phi(K)}{\phi(K_0)}, \\ p(\bar\beta, K) = p_\infty \dfrac{2\gamma K^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}\left\{1 - \dfrac{\gamma^2-1}{2\,\phi(K_0)}\dfrac{K\phi(K)[\bar\beta - \bar f(K, K_0)]}{\sqrt{[2\gamma K^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)K^2+2]}}\right\}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \\ \rho(\bar\beta, K) = \rho_\infty \dfrac{(\gamma+1)K^2}{(\gamma-1)K^2+2}\left\{1 - \dfrac{\gamma^2-1}{2\,\phi(K_0)}\dfrac{K\phi(K)[\beta - f(K, K_0)]}{\sqrt{[2\gamma K^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)K^2+2}}\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}. \end{cases}$$

Maintenant, si

$$(45)\qquad x = \bar X(\bar\beta), \qquad y = \frac{1}{M_\infty}\bar Y(\bar\beta),$$

sont les équations paramétriques du profil, le passage du plan $(\bar\beta, K)$ *au plan physique* (x, y) *s'effectue par les formules :*

$$(46)\quad \begin{cases} x = \bar x(\bar\beta, K) = \bar X(\bar\beta) + \dfrac{\phi(K_0)}{[2\gamma \bar g^2(\bar\beta, K_0) - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}}\displaystyle\int_K^{K_0} \bar H^*(K, K_0)[2\gamma t^2 - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\,dt, \\ M_\infty y = \bar y(\bar\beta, K) = \bar Y(\bar\beta) + \\ \quad + \dfrac{\phi(K_0)}{[2\gamma \bar g^2(\bar\beta, K_0) - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}}\displaystyle\int_K^{K_0} \bar H^*(t, K_0)[2\gamma t^2 - (\gamma-1)]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}[\bar\theta(\bar\beta, t) + \bar\mu(\bar\beta, t)]\,dt, \end{cases}$$

où, d'une part, $\bar g(\bar\beta, K)$ *est la fonction inverse de* $\bar f(K, K_0)$

$$(47)\qquad \bar f[\bar g(\bar\beta, K_0), K_0] \equiv \bar\beta,$$

et où, d'autre part, la fonction $\bar H^*(K, K_0)$ *est donnée par la formule :*

$$(48)\qquad \bar H^*(K, K_0) = \bar R[\bar f(K, K_0)]\ \mathcal{L}(K) + \frac{\mathcal{M}(K)}{\mathcal{U}(K)}\int_K^{K_0} \mathcal{U}(t)\,\mathcal{N}(t)\,\bar R[\bar f(t, K_0)]\,dt,$$

dans laquelle intervient la distribution des rayons de courbure du profil :

$$(49)\qquad R = M_\infty \bar R(\bar\beta).$$

II,3.4. *REPRÉSENTATION DE L'ONDE DE CHOC DE TÊTE.*

Si l'on désire seulement obtenir une représentation de l'onde de choc de tête, l'on peut y parvenir en utilisant les formules (10) et en passant en paramètrage $(\bar\beta, K)$. L'on a d'abord :

$$(50)\qquad \frac{\mu^*(S)}{\omega(S) - \theta^*(S)} = A(K) = \sqrt{\frac{2\gamma K^2 - (\gamma-1)}{(\gamma-1)K^2+2}},$$

de sorte que les équations paramétriques cherchées de l'onde de tête sont :

$$(51)\quad \begin{cases} x^*(K, K_0) = \phi(K_0)\displaystyle\int_K^{K_0} A(t)\bar H^*(t, K_0)\,dt, \\ M_\infty y^*(K, K_0) = \phi(K_0)\displaystyle\int_K^{K_0} t\,A(t)\bar H^*(t, K_0)\,dt. \end{cases}$$

On utilise alors l'équation (48) et on intervertit l'ordre des intégrations dans l'intégrale double qui se présente, et il vient ainsi :

$$(52)\qquad \begin{cases} X^*(K,K_0) = \phi(K_0)\displaystyle\int_K^{K_0} \bar{R}[\bar{f}(t,K_0)]\cdot\left\{\mathcal{J}(t)+\mathcal{T}(t)[\mathcal{A}(t)-\mathcal{A}(K)]\right\}dt, \\ M_\infty\, y^*(K,K_0) = \phi(K_0)\displaystyle\int_K^{K_0} \bar{R}[\bar{f}(t,K_0)]\cdot\left\{t\mathcal{J}(t)+\mathcal{T}(t)[\mathcal{B}(t)-\mathcal{B}(K)]\right\}dt. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{J}(K)$, $\mathcal{T}(K)$, $\mathcal{A}(K)$, $\mathcal{B}(K)$, sont définies par les formules :

$$(53)\qquad \begin{cases} \mathcal{J}(K) = A(K)\ \mathcal{L}(K), \\ \mathcal{T}(K) = \mathcal{M}(K)\ \mathcal{U}(K), \\ \dfrac{d\mathcal{A}}{dK} = \dfrac{A(K)\mathcal{M}(K)}{\mathcal{U}(K)}, \\ \dfrac{d\mathcal{B}}{dK} = K\dfrac{d\mathcal{A}}{dK}. \end{cases}$$

Il est intéressant de déterminer la forme asymptotique de l'onde de choc —voisinage de $K=1-$, mais pour cela les formules (51) sont préférables aux formules (52). L'examen des formules (36) permet d'obtenir les comportements suivants au voisinage de $K=\mathcal{J}$:

$$(54)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}(K) \cong \mathcal{L}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1}+\cdots, \\ \mathcal{M}(K) \cong \mathcal{M}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1}+\cdots, \\ \mathcal{U}(K) \cong \mathcal{U}_2(\gamma)(K-1)^2+\cdots, \end{cases}$$

avec :

$$(55)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{-1}(\gamma) = \dfrac{4}{\gamma+1}, \quad \mathcal{M}_{-1}(\gamma) = \dfrac{2}{\gamma+1}, \\ \mathcal{U}_2(\gamma) = \left(1-\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)^{-\frac{4\gamma-2+3\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{8\gamma}}\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)^{\frac{3\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}-4\gamma+2}{8\gamma}}\cdot \\ \qquad\cdot\left(1+\dfrac{2}{\gamma-1}\right)^{-\frac{1}{4}}\exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{2(\gamma-1)}}\ \mathrm{Artg}\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{2}}\right). \end{cases}$$

La formule (35) donne alors :

$$(56)\qquad H^*(K,K_0) = H_{-3}(\gamma,K_0)(K-1)^{-3}+\cdots.$$

avec :

$$(57)\qquad H_{-3}(\gamma,K_0) = \frac{\mathcal{M}_{-1}(\gamma)}{\mathcal{U}_2(\gamma)}\int_1^{K_0}\mathcal{U}(t)\mathcal{M}(t)\,\bar{R}\,\bar{f}[(t,K_0)]\,dt,$$

et, par application de (51) :

$$(58)\qquad M_\infty\, y^* \cong \frac{\phi(K_0)H_{-3}(\gamma,K_0)}{2}\left(M_\infty\frac{dy^*}{dx}-1\right)^{-2}+\cdots,$$

et l'on voit que l'onde de choc présente une branche parabolique à l'infini.

$$(59)\qquad \begin{cases} M_\infty y^* \cong x+\sqrt{2\,\alpha\,x}+\cdots \\ \alpha = \phi(K_0)H_{-3}(\gamma,K_0). \end{cases}$$

Ce résultat est l'équivalent hypersonique du résultat bien connu de FRIEDRICHS [13].

II, 3. 5. *RÉSULTATS NUMÉRIQUES.*

Les diverses fonctions universelles de K qui interviennent dans la description précédente ont été tabulées. Pour les fonctions qui deviennent infinies à $K = 1$, on a séparé les parties principales; ainsi :

$$
(60)\qquad
\begin{cases}
\mathfrak{L}(K) = \mathfrak{L}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1} + \mathfrak{L}^{*}(K), \\
\mathfrak{M}(K) = \mathfrak{M}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1} + \mathfrak{N}^{*}(K), \\
\mathfrak{N}(K) = \mathfrak{N}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1} + \mathfrak{N}^{*}(K), \\
\mathfrak{I}(K) = \mathfrak{I}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1} + \mathfrak{I}^{*}(K), \\
\mathfrak{A}(K) = \mathfrak{A}_{-2}(\gamma)(K-1)^{-2} + \mathfrak{A}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1} + \mathfrak{A}_{0}(\gamma)\,\mathrm{Lg}\,(K-1) + \mathfrak{A}^{*}(K), \\
\mathfrak{B}(K) = \mathfrak{B}_{-2}(\gamma)(K-1)^{-2} + \mathfrak{B}_{-1}(\gamma)(K-1)^{-1} + \mathfrak{B}_{0}(\gamma)\,\mathrm{Lg}\,(K-1) + \mathfrak{B}^{*}(K);
\end{cases}
$$

pour $\gamma = 1{,}4$, les valeurs des coefficients sont données dans le tableau suivant :

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{L}_{-1}(\gamma) = 5/3 & \mathfrak{M}_{-1}(\gamma) = 2 & \mathfrak{N}_{-1}(\gamma) = 5/3 \\
\mathfrak{I}_{-1}(\gamma) = 5/3 & & \\
\mathfrak{A}_{-2}(\gamma) = -0{,}4562735 & \mathfrak{A}_{-1}(\gamma) = +0{,}4932950 & \mathfrak{A}_{0}(\gamma) = 0{,}2155459 \\
\mathfrak{B}_{-2}(\gamma) = -0{,}4562735 & \mathfrak{B}_{-1}(\gamma) = -0{,}4192520 & \mathfrak{B}_{0}(\gamma) = -0{,}2777491.
\end{array}
$$

Les diverses fonctions figurant dans (57) sont tabulées ci-contre de $K = 1{,}05$ à $K = 6$. Pour $K < 1{,}05$, on se servira des développements (57). Il est improbable que l'on ait à se servir de valeurs de K supérieures à 6. Dans le cas contraire, on se servirait de développements asymptotiques au voisinage de $K = \infty$.

K	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{I}$	ϕ	ψ	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$
1,05	32,307 880	34,628 746	35,591 985	33,896 749	0,165 159	1,000 010	0,081 342	0,005 112	−173,2892	−190,0557
1,06	26,767 531	28,072 958	30,043 026	28,342 051	0,194 490	1,000 018	0,097 159	0,007 266	−119,1323	−133,9408
1 07	22,814 448	23,418 363	26,081 874	24,375 002	0,222 748	1,000 028	0,112 833	0,009 764	−86,6487	−98,3585
1,08	19,853 362	19,950 905	23,113 219	21,505 440	0,250 000	1,000 041	0,128 370	0,012 593	−65,6773	−75,8213
1,09	17,552 643	17,272 753	20,805 200	19,086 305	0,276 319	1,000 057	0,143 772	0,015 743	−51,3752	−60,3079
1,10	15,552 884	15,145 768	18,765 038	17,057 890	0,298 609	1,000 077	0,159 046	0,019 201	−41,1987	−49,1674
1,12	12,965 135	11,997 329	16,198 261	14,460 923	0,350 082	1,000 128	0,189 206	0,027 005	−28,0414	−35,7528
1,14	11,007 230	9,787 613	14 229 117	12,479 260	0 395 433	1,000 196	0,218 884	0,035 932	−20,1906	−25,7098
1.16	9,544 115	8,162 373	12,755 719	10,993 465	0,438 073	1,000 282	0,248 094	0,045 914	−15,1477	−19,9140
1 18	8,411 099	6,923 666	11,614 348	9,838 866	0,478 353	1,000 388	0,276 865	0,056 894	−11,7258	−15,9124
1,20	7,508 216	5,953 563	10,703 965	8,915 33.	0,516 443	1,000 516	0,305 220	0,068 818	−9,3115	−13,0425
1,25	5,895 438	4,271 411	9,076 797	7,254 708	0,603 612	1,000 929	0,374 347	0,102 481	−5,6507	−8,5687
1,30	4 833 116	3,213 153	8 006 028	6,149 338	0,681 372	1,001 488	0,441 227	0,141 190	−3,7116	−6,1011
1,35	4,083 900	2,500 934	7,253 323	5,361 181	0,751 812	1,002 196	0,506 037	0,184 496	−2,5710	−4,5921
1,40	3,529 248	1,997 735	6,699 876	4,771 120	0,816 481	1,003 065	0,569 014	0,232 056	−1,8484	−3,6000
1,45	3,103 570	1,629 023	6,279 318	4,313 140	0,876 710	1,004 058	0,630 276	0,283 631	−1,3647	−2,9116
1,50	2,767 538	1,350 932	5,952 082	3,947 483	0,933 330	1,005 211	0,690 016	0,338 999	−1,0268	−2,4138
1,60	2, 73084	0,967 274	5,484 114	3,400 593	1,038 741	1,007 938	0,805 319	0,460 602	−0,6010	−1,7562
1,70	1,929 025	0,722 257	5,176 894	3,011 542	1,137 073	1,011 189	0,915 766	0,596 050	−0,3557	−1,3526
1,80	1,677 232	0,557 138	4,969 536	2,720 564	1,230 869	1,015 035	1,022 016	0,744 903	−0,2033	−1,0868
1,90	1,486 404	0,440 960	4,832 114	2,495 571	1,322 966	1,019 092	1,124 600	0,907 037	−0,1033	−0,9023
2,00	1,329 745	0,358 695	4,715 301	2 303 186	1,405 227	1,023 653	1,224 172	1,081 760	−0,0348	−0,7682

TABLEAU I

K	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{J}$	ϕ	ψ	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$
2,00	1,329 745	0,358 695	4,715 301	2,303 186	1,405 227	1,023 653	1,224 172	1,081 760	− 0,3479	− 0,7682
2,2	1,119 998	0,245 267	4,656 198	2,047 318	1,595 510	1,033 769	1,415 974	1,472 672	+ 0,0494	− 0,5933
2,4	0,970 840	0,177 811	4,653 915	1,855 864	1,780 857	1,045 086	1,596 107	1,917 050	+ 0,0963	− 0,4862
2,6	0,863 011	0,134 147	4,707 062	1,712 763	1,973 471	1,057 010	1,770 456	2,417 094	0,1244	− 0,4162
2,8	0,781 534	0,164 462	4,794 417	1,600 954	2,172 927	1,069 803	1,936 339	2,974 412	0,1423	− 0,3680
3,0	0,718 270	0,083 413	4,910 027	1,511 540	2,382 012	1,082 803	2,098 505	3,590 920	0,1543	− 0,3336
3,2	0,667 663	0,068 013	5,043 969	1,437 848	2,599 672	1,096 247	2,253 853	4,268 445	0,1625	− 0,3082
3,4	0,626 355	0,056 428	5,192 630	1,375 999	2,826 536	1,109 918	2,406 750	5,008 699	0,1684	− 0,2880
3,6	0,592 023	0,047 509	5,352 936	1,323 214	3,062 835	1,123 728	2,553 851	5,813 615	0,1726	− 0,2732
3,8	0,563 046	0,040 507	5,522 600	1,271 895	3,308 512	1,137 609	2,699 344	6,684 700	0,1757	− 0,2614
4,0	0,538 256	0,034 914	5,699 854	1,237 487	3,563 181	1,151 513	2,839 742	7,622 860	0,1777	− 0,2520
4,2	0,516 804	0,030 380	5,883 511	1,202 440	3,828 018	1,165 384	2,979 122	8,632 114	0,1800	− 0,2444
4,4	0,498 045	0,026 657	6,072 456	1,170 370	4,101 763	1,179 204	3,113 911	9,711 604	0,1814	− 0,2382
4,6	0,481 490	0,023 564	6,265 873	1,141 837	4,384 628	1,192 945	3,248 116	10,863 405	0,1826	− 0,2330
4,8	0,466 761	0,020 968	6,463 127	1,115 951	4,676 709	1,206 584	3,378 106	12,089 362	0,1835	− 0,2286
5,0	0,453 560	0,018 768	6,663 716	1,092 318	4,985 799	1,220 110	3,507 842	13,412 170	0,1843	− 0,2249
5,2	0,441 652	0,016 889	6,867 204	1,070 623	5,288 233	1,233 508	3,633 654	14,769 725	0,1849	− 0,2218
5,4	0,430 847	0,015 272	7,073 268	1,050 607	5,607 093	1,246 771	3,759 470	16,225 623	0,1855	− 0,2192
5,6	0,420 987	0,013 871	7,281 526	1,032 054	5,935 089	1,259 894	3,881 594	17,762 029	0,1860	− 0,2169
5,8	0,411 943	0,012 649	7,491 666	1,014 779	6,271 488	1,272 880	4,003 929	19,378 535	0,1864	− 0,2150
6,0	0,403 619	0,011 578	7,703 807	0,998 658	6,616 656	1,285 699	4,122 759	21,076 880	0,1867	− 0,2133

TABLEAU II

II, 3.6. *UN EXEMPLE NUMÉRIQUE.*

En vue d'estimer en détail la validité de certaines approximations qui ont été utilisées tout au long de ce chapitre, un exemple numérique a été traité. Il s'agit d'un profil biconvexe en arç de cercle de 10 % d'épaisseur relative, placé sans incidence dans un écoulement à $M_\infty = 10$. Le but final était de montrer, en calculant η par la formule de représentation (2.72), que le schéma général d'approximations successives basé sur η est très rapidement convergent. Le résultat est indiqué sur la figure 17 qui donne la répartition de η sur le profil. On peut remarquer que, sur la majeure partie du profil, η est inférieur à 0,5 %. Cela explique que les calculs que

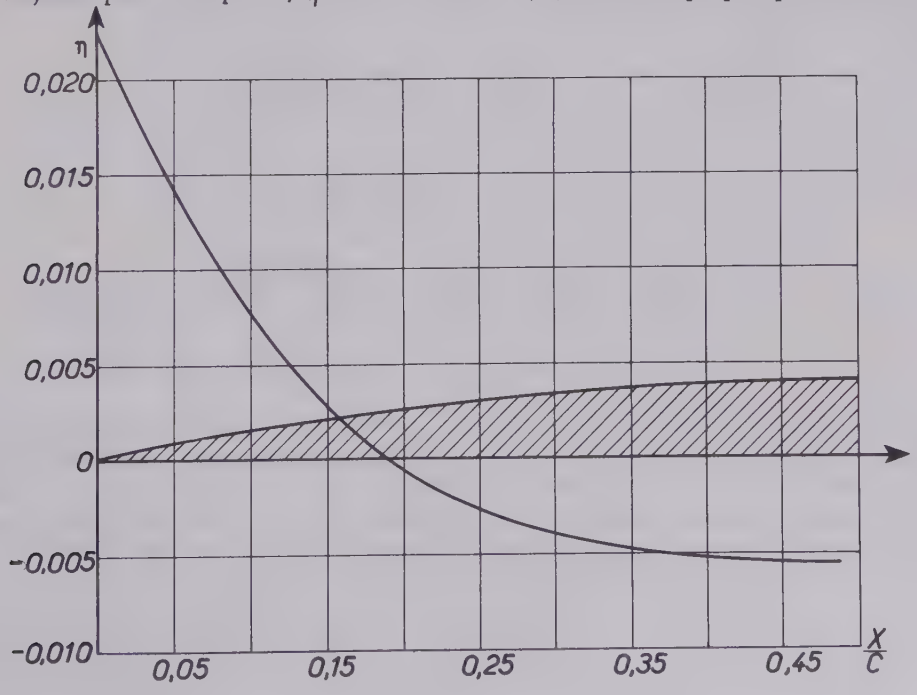


Fig. 17 - Valeurs de η sur un profil parabolique de 10 % d'épaisseur relative à M_∞.

l'on a pu effectuer par la méthode des caractéristiques n'aient jamais mis en évidence des différences appréciables, en ce qui concerne la pression sur les profils, avec les résultats que l'on peut déduire de l'application de la méthode de choc-détente.

Au cours du calcul, on a profité des diverses circonstances simplificatrices mises en évidence au cours de ce chapitre. Il y a d'abord l'effet de la variabilité de G dans le champ. La figure 18 montre la courbe $\beta = f(S)$, donnant la position de l'onde de choc dans le plan (β, S). L'effet de la variabilité de G est inappréciable sur cette courbe. Dans le coin supérieur de la figure 18 on a indiqué l'effet de la variabilité de G sur le facteur exponentiel $\exp(-\int_{S_0}^{S} G\, d\Sigma)$ le long de la dernière caractéristique $\beta = \beta_l$ –dernière caractéristique rencontrant l'onde de choc de tête–. Les deux autres simplifications dont on a fait usage sont relatives à l'inversion

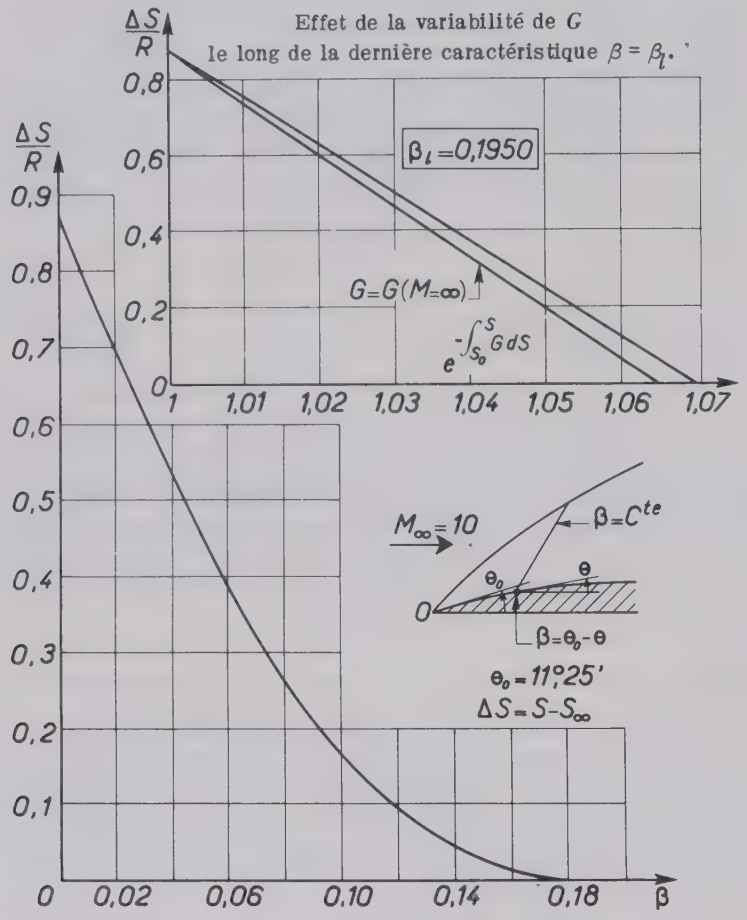


Fig.18 - Position de l'onde de choc dans le plan (β, S).

de l'équation de VOLTERRA (3.5). L'une d'elles fait usage de la constance de p sur une caractéristique $\beta = C^{te}$, elle est examinée sur la figure 19. On voit que cette hypothèse simplificatrice est parfaitement justifiée, sauf peut-être sur la dernière caractéristique - ce qui s'explique en raison de la "longueur" exceptionnelle de cette dernière. Une autre simplification, qui découle de la première, consiste à évaluer l'angle de Mach μ par la formule approchée (3.18). La validité de cette approximation est également examinée sur la figure 20. L'erreur maximum est de 10 %, et elle est atteinte sur la dernière caractéristique. La figure 21 montre le réseau des caractéristiques descendantes dans le plan (β, S), réseau qui intervient dans l'application de la formule de représentation pour η.

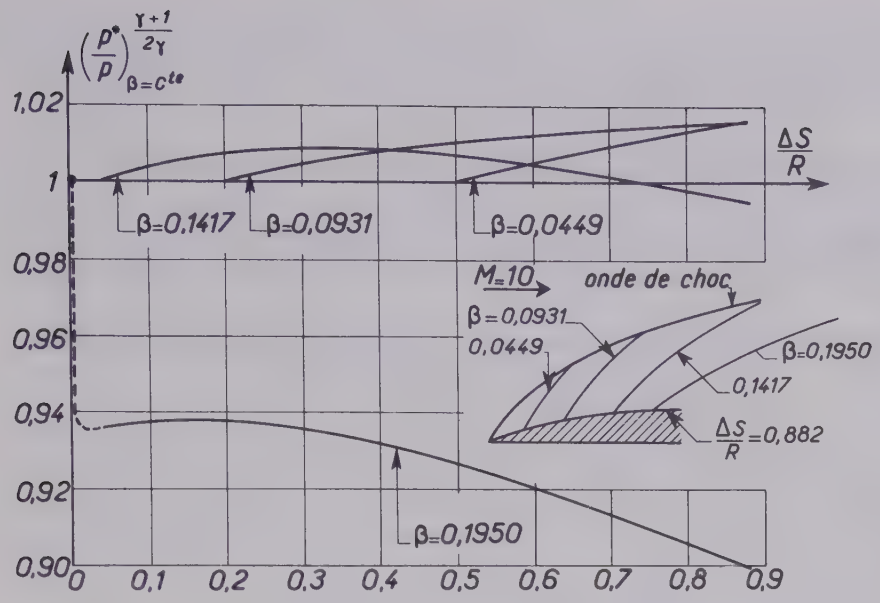


Fig.19

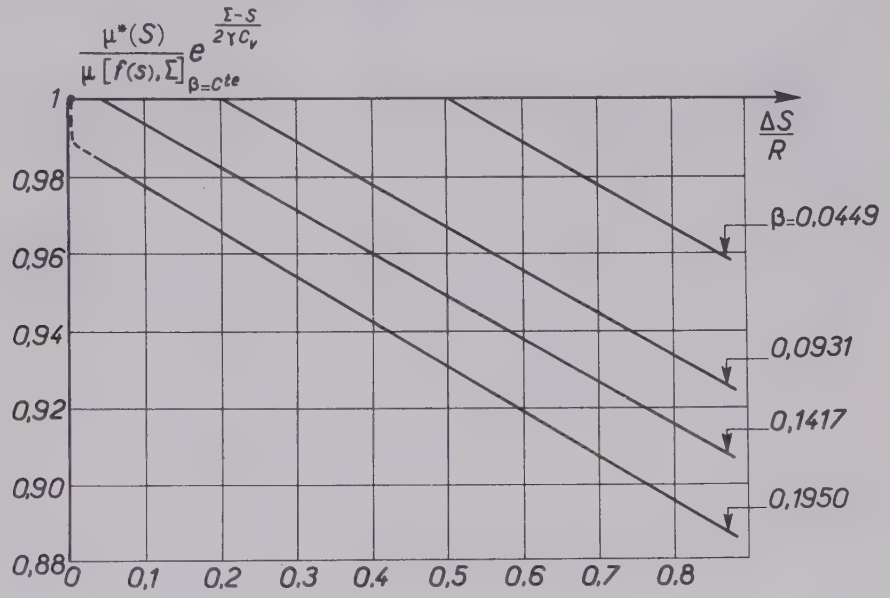


Fig.20

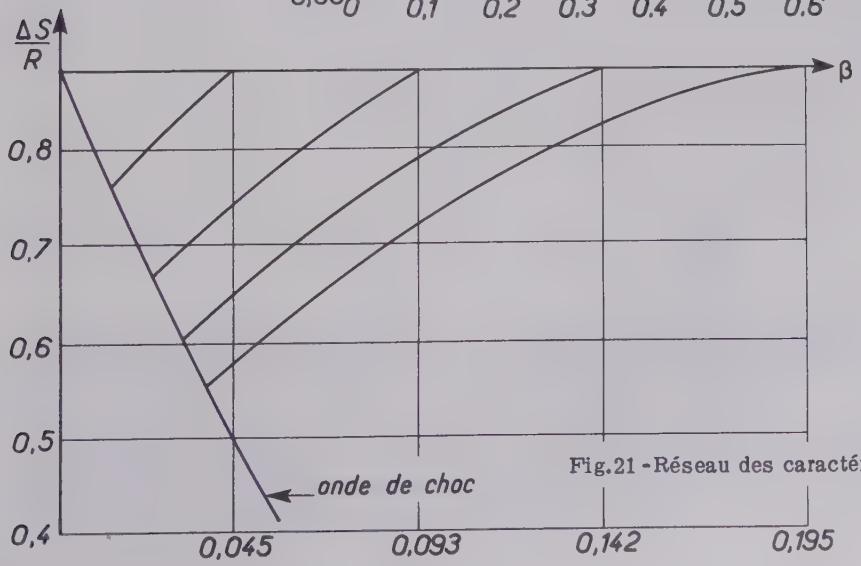


Fig.21 - Réseau des caractéristiques dans le plan (β, S).

II, 4. ÉCOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS.

II, 4. 1. *ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉTHODE CHOC-DÉTENTE GÉNÉRALISÉE.*

Considérons, en chaque point de l'écoulement, le trièdre de SERRET-FRENET $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, associé à la ligne de courant qui passe en ce point. Le vecteur vitesse étant toujours noté :

$$\vec{V} = q\vec{t}, \tag{1}$$

l'on établit aisément, comme conséquence des équations du mouvement, la relation suivante :

$$\vec{\nabla} p = -\rho q^2 \left\{ \vec{t}\, \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{t}}{M^2-1} + \vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t} \right\}. \tag{2}$$

Mais, quels que soient les trois vecteurs $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, formant un repère orthonormé, l'on a :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{t} = \vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) + \vec{b}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}), \tag{3}$$

et, en reportant dans (2) l'on obtient :

$$\vec{\nabla} p = -\rho q^2 \left\{ \vec{t}\, \frac{\vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\vec{t})}{M^2-1} + \vec{n}\vec{n}\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) + t\, \frac{\vec{b}_o(\vec{b}_o\vec{\nabla}\vec{t})}{M^2-1} \right\}. \tag{4}$$

Ainsi, en ignorant le dernier terme du { }, l'on est conduit à une équation analogue à (2.4 *a*). Cela incite à considérer une fois de plus le problème aux valeurs propres (2.5) et sa solution (2.6). Il est alors possible de substituer à l'équation vectorielle (4) le système de trois équations scalaires suivant :

$$\begin{cases} \vec{e_1}\cdot\vec{\nabla} p = -\rho q^2 \operatorname{tg}\mu \left\{ \vec{n}\cdot(\vec{e_1}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) + \sin\mu\, \vec{b}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) \right\}, \\ \vec{e_2}\cdot\vec{\nabla} p = \rho q^2 \operatorname{tg}\mu \left\{ \vec{n}\cdot(\vec{e_2}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) - \sin\mu\, \vec{b}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) \right\}, \\ \vec{b}\cdot\vec{\nabla} p = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Le paramètre de EGGERS et SYVERTSON s'introduit tout naturellement sous la forme :

$$\eta = \frac{\vec{n}\cdot(\vec{e_1}\cdot\vec{\nabla}\vec{t})}{\vec{n}\cdot(\vec{e_2}\cdot\vec{\nabla}\vec{t})} \tag{6}$$

et l'on obtient une équation analogue à (2.43) :

$$\frac{\sin 2\mu}{2\gamma p}\, \vec{t}\cdot\vec{\nabla} p = \frac{1-\eta}{1+\eta}\, \vec{n}\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) - \operatorname{tg}\mu\ \vec{b}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}). \tag{7}$$

Parvenu à ce stade, EGGERS [8] suppose que sont vérifiées les deux conditions :

$$\eta \ll 1 \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\mu\, \vec{b}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) \ll \vec{n}\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}), \tag{9}$$

moyennant quoi l'équation (7) se réduit à la forme très simple :

$$\frac{\sin(2\mu)}{2\gamma p}\, \vec{t}\cdot\vec{\nabla} p = \vec{n}\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}). \tag{10}$$

Il faut bien reconnaître que l'on ne dispose ici d'aucun procédé permettant d'estimer la validité des conditions (8) et (9). On peut seulement dire que, lorsque le nombre de Mach est très élevé, la présence du terme tg μ rend (9) quelque peu vraisemblable, et que, pour les écoulements presque plans ou presque de révolution, la valeur de η sur l'onde de choc est voisine de la valeur très petite η^* de la formule (2.54). Dans ces conditions, le mieux est de considérer que l'équation (10) a une origine empirique et d'en développer les conséquences. L'une de ces conséquences est une formule explicite donnant le gradient de portance initial

d'une ogive de révolution. Cette formule, qui est due à SAVIN [43] sera rétablie plus loin. En se reportant au mémoire de SAVIN, le lecteur pourra constater que l'on obtient ainsi, par comparaison avec des résultats de soufflerie, une confirmation empirique indirecte de (8) et (9).

L'équation (10), qui servira maintenant de point de départ aux développements ultérieurs, indique que l'évolution de la pression le long des lignes de courant est la même que dans une détente de PRANDTL-MEYER. Il n'en résulte pourtant pas que la pression sur l'obstacle soit, pour autant, aussi simple à obtenir que dans le cas bidimensionnel plan; en effet, le réseau des lignes de courant sur la surface de l'obstacle n'est pas connu *a priori*. EGGERS [8] tourne cette difficulté en admettant que les lignes de courant en question sont des lignes géodésiques de la surface de l'obstacle. Toutefois, cette affirmation ne paraît pas s'imposer comme conséquence directe des hypothèses (8) (9), et il est préférable, pour ne pas détruire la consistance interne de la méthode, de reformuler le problème comme suit : Considérons figure 22, en un point M de (S), le trièdre de DARBOUX $\vec{t}$, $\vec{g}$, $\vec{N}$, nous avons :

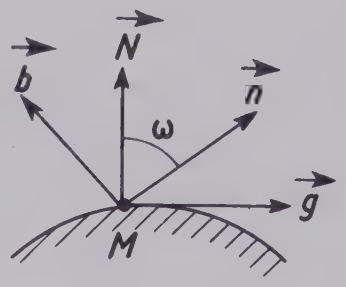


Fig. 22

$$(11)\qquad \begin{cases} \vec{n} = \vec{N}\cos\omega + \vec{g}\sin\omega, \\ \vec{b} = \vec{N}\sin\omega - \vec{g}\cos\omega, \end{cases}$$

et en désignant par R_g et R_N le rayon de courbure géodésique et le rayon de courbure de la section normale –associés à la direction $\vec{t}$– il vient :

$$(12)\qquad \vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_N\cos\omega} = \frac{1}{R_g\sin\omega}\cdot$$

Or, il est facile d'obtenir une équation déterminant ω. En effet, d'après les hypothèses faites (8) (9) et d'après les équations (4) et (5) l'on a :

$$(13)\qquad \vec{n}\cdot\vec{\nabla}_p \cong -\frac{e_2\cdot\nabla p}{2\sin\mu} \cong -\frac{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}_p}{\sin\mu\cos\mu}$$

de sorte que :

$$(14)\qquad \vec{g}\cdot\vec{\nabla}_p \cong -\frac{2\sin\omega}{\sin(2\mu)}\,\vec{t}\cdot\vec{\nabla}_p.$$

En désignant par $\vec{\vec{K}}$ le tenseur de courbure de la surface de l'obstacle l'on obtient ainsi un système de deux équations pour déterminer l'écoulement à la surface de l'obstacle :

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin(2\mu)}{2\gamma p}\,\vec{t}\cdot\vec{\nabla}_p = \dfrac{\vec{t}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{t}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin(2\mu)}{2}\dfrac{\vec{g}\cdot\vec{\nabla}_p}{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}_p}\right)^2}}, \\ \vec{g}\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) = -\dfrac{\dfrac{\sin 2\mu}{2}\dfrac{\vec{g}\cdot\vec{\nabla}_p}{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}_p}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin(2\mu)}{2}\dfrac{\vec{g}\cdot\vec{\nabla}_p}{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}_p}\right)^2}}\,\vec{t}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{t}\cdot \end{cases}$$

En fait, il n'y a pas lieu de s'attendre à ce que le rapport $\frac{\vec{g}\cdot\vec{\nabla}p}{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}p}$ soit $\gg 1$; il est alors raisonnable d'ajouter aux hypothèses (8) (9), la suivante :

$$\sin(2\mu)\,\frac{\vec{g}\cdot\vec{\nabla}p}{\vec{t}\cdot\vec{\nabla}p} \ll 1, \tag{16}$$

qui, sans en être tout à fait une conséquence, peut au moins être estimée dans chaque cas particulier.

En définitive, l'on voit que les équations fondamentales de la méthode de choc détente généralisée sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(2\mu)}{2\gamma p}\,\vec{t}\cdot\vec{\nabla}p = \vec{t}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{t}, & a) \\ \vec{g}\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\vec{t}) = 0. & b) \end{cases} \tag{17}$$

La seconde de ces équations montre que les lignes de courant à la surface de l'obstacle sont des lignes géodésiques de cette dernière, conformément à ce qu'annonçait EGGERS. Sur l'arête de l'obstacle, la direction initiale de ces lignes est connue d'après les lois de l'onde de choc, il en résulte que le réseau des lignes de courant sur la surface de l'obstacle peut être déterminé *a priori*. Il est ensuite facile, en faisant usage de (17.*a*), de déterminer la pression en chaque point. Eventuellement, l'on pourra ensuite examiner la validité de (16). Si l'obstacle, au lieu d'être une aile pourvue d'une arête tranchante, est un corps fuselé pourvu d'une pointe vive en forme de cône presque circulaire, la méthode est encore applicable : toutes les lignes de courant à la surface de l'obstacle sont issues de la pointe et leurs directions sont celles des génératrices rectilignes de la surface conique tangente. La répartition des pressions à la pointe doit être obtenue par application de la théorie des écoulements coniques non linéaires. La méthode de choc détente peut donc être mise en œuvre dans le cas des obstacles de révolution sous faible incidence.

En ce qui concerne la propriété des lignes de courant d'être des géodésiques, on peut remarquer que la même propriété est vérifiée en écoulement newtonien, ce qui autorise à la considérer comme une propriété générale des écoulements hypersoniques.

Lorsque l'écoulement sur la surface de l'obstacle a été obtenu, l'ensemble de l'écoulement dans la couche de choc peut être construit par couches successives. Sur l'onde de choc attachée à l'arête, traçons une ligne à distance constante de la surface de l'obstacle, les lignes de courant issues de cette ligne engendrant une surface qui peut être tracée en faisant usage de la conservation de la masse. Sur cette nouvelle surface, le processus précédent peut de nouveau être appliqué : on peut déterminer le réseau des lignes de courant sur cette nouvelle surface et, également, la répartition de pression. En procédant par couches, on parviendra à construire tout l'écoulement. Il serait naturellement possible alors d'examiner la validité des hypothèses (8) (9). Ce procédé de construction par couches successives est exactement celui imaginé par EGGERS-SAVIN-SYVERTSON [9], que nous avons réussi à formuler sous une forme explicite dans la section II de ce chapitre pour le cas des écoulements plans.

II, 4. 2. *EFFORTS GLOBAUX SUR UN OBSTACLE DE RÉVOLUTION.*

En admettant que, sous incidence faible, les lignes de courant à la surface d'une ogive de révolution sont confondues avec les méridiennes, SAVIN [43] a obtenu des formules très élégantes donnant le coefficient de portance et le coefficient de moment, par application de la relation (10).

Le fait que les lignes de courant soient confondues avec les méridiennes est une conséquence de l'équation (17 *b*). En effet, si l'on exclut une très mince couche dont l'épaisseur

est $0\left(\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)$ $-\alpha$ angle d'incidence – les lignes de courant à la pointe conique sont asymptotes aux génératrices rectilignes de cette pointe. Or, cette direction asymptotique joue le

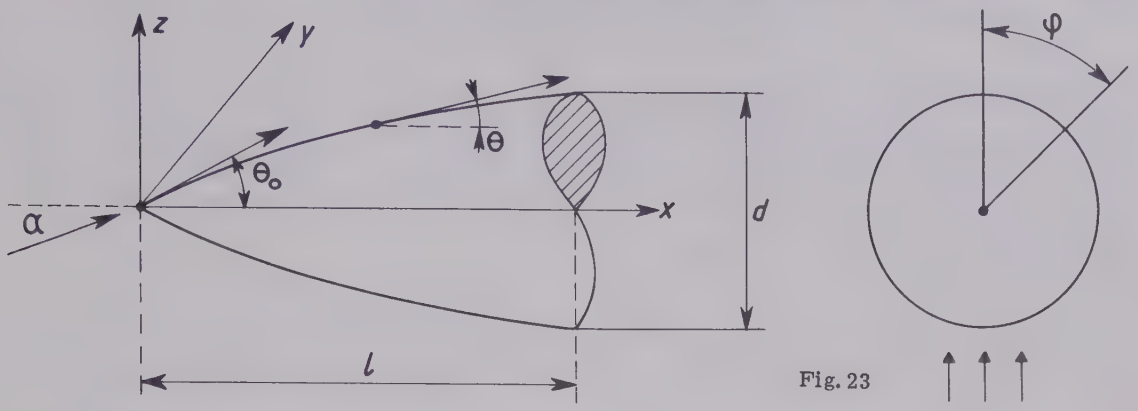


Fig. 23

rôle de direction initiale pour les lignes de courant à la surface de l'ogive, comme l'explique la figure 24. Finalement, les lignes géodésiques, dont la direction initiale est celle des génératrices rectilignes du cône tangent à la pointe, ne sont autres que les méridiennes de la surface de l'ogive.

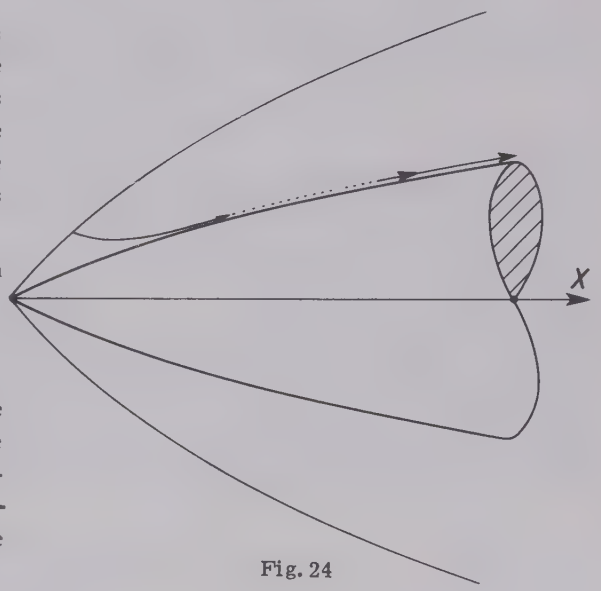


Fig. 24

Soit l la longueur de l'ogive, d son diamètre apparent et :

$$r = \frac{d}{2} f\left(\frac{x}{l}\right) \tag{18}$$

l'équation de sa méridienne. Soit φ l'angle méridien – avec $\varphi = 0$ sur la méridienne détendue et $\varphi = \pi$ sur la méridienne comprimée –. En désignant par α l'angle d'incidence, la pression à la surface de l'ogive est de la forme :

$$p = p_0\left(\frac{x}{l}\right) + \alpha p_1\left(\frac{x}{l}, \varphi\right) + 0(\alpha^2). \tag{19}$$

Mais, si θ désigne l'inclinaison sur l'axe de la tangente à la méridienne, la formule (17 a) donne, par intégration :

$$\int_{p\left(\frac{x}{l}, \varphi, \alpha\right)}^{p(0,\varphi,\alpha)} \frac{\sin 2\mu}{2\gamma p} dp = \theta(0) - \theta\left(\frac{x}{l}\right) \tag{20}$$

et, en dérivant par rapport à α, il vient* :

$$\frac{\sin\left[2\mu_0(x/l)\right]}{2\gamma p_0(x/l)} p_1\left(\frac{x}{l}, \varphi\right) = \frac{\sin 2\mu_0(0)}{2\gamma p_0(0)} p_1(0, \varphi). \tag{21}$$

Maintenant, la théorie des écoulements coniques montre que $p_1(0, \varphi)$ est proportionnel à $\cos\varphi$, de sorte que la pression à la surface de l'ogive peut se mettre sous la forme :

$$p = p_0\left(\frac{x}{l}\right) - \alpha p_1\left(\frac{x}{l}\right) \cos\varphi + 0(\alpha^2), \tag{22}$$

---

* Il faut pour cela négliger la variation d'entropie avec α.

avec :

$$p_1\left(\frac{x}{l}\right) = p_1(0)\,\frac{\sin[2\mu_0(0)]}{\sin\left[2\mu_0\left(\frac{x}{l}\right)\right]}\,\frac{p_0(x/l)}{p_0(0)}, \tag{23}$$

$p_1(0)$ étant donné par la théorie des écoulements coniques [45] les fonctions $p_0\left(\frac{x}{l}\right)$ et $\mu_0\left(\frac{x}{l}\right)$ donnant la répartition des pressions et des angles de Mach sur l'ogive à incidence nulle. Pour obtenir ces fonctions il suffit de faire appel à la théorie des écoulements coniques qui donne $p_0(0)$ et $\mu_0(0)$, puis effectuer une détente de PRANDTL-MEYER le long de la méridienne

$$\int_{p_0\left(\frac{x}{l}\right)}^{p_0(0)} \frac{\sin(2\mu_0)}{2\gamma p_0}\,dp_0 = \theta(0) - \theta\left(\frac{x}{l}\right). \tag{24}$$

Si l'on néglige la contribution due à la pression de culot, le coefficient de force normale et le coefficient de moment sont donnés par les formules :

$$\begin{cases} C_{\mathfrak{N}} = -\dfrac{4}{\pi d^2}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\iint_S p\cos\varphi\cos\theta\,dS, \\ C_{\mathfrak{M}} = -\dfrac{4}{\pi d^2 l}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\iint_S p(x\cos\theta + r\sin\theta)\cos\varphi\,dS, \end{cases} \tag{25}$$

les intégrales étant étendues à la surface de l'ogive. En dérivant par rapport à α, et en faisant usage de (22) et (23) il vient :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial C_{\mathfrak{N}}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} = \dfrac{4}{\pi d^2}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\int_0^l p_1(0)\,\dfrac{\sin[2\mu_0(0)]}{\sin\left[2\mu_0\left(\frac{x}{l}\right)\right]}\,\dfrac{p_0(x/l)}{p_0(0)}\,\dfrac{d}{2}f\left(\frac{x}{l}\right)dx\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi, \\ \left(\dfrac{\partial C_{\mathfrak{M}}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} = \dfrac{4}{\pi d^2 l}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\int_0^l p_1(0)\left(x + \dfrac{d}{2}f\left(\frac{x}{l}\right)\operatorname{tg}\theta\right)\cdot \\ \qquad\qquad \cdot\dfrac{\sin[2\mu_0(0)]}{\sin\left[2\mu_0\left(\frac{x}{l}\right)\right]}\,\dfrac{p_0(x/l)}{p_0(0)}\,\dfrac{d}{2}f\left(\frac{x}{l}\right)dx\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi. \end{cases} \tag{26}$$

Or, le cône tangent à la pointe de demi-ouverture $\theta(0)$ donne lieu à des formules analogues, à condition de remplacer $f\left(\frac{x}{l}\right)$ par x/l, $\dfrac{\sin[2\mu_0(0)]}{\sin[2\mu_0(x/l)]}\,\dfrac{p_0(x/l)}{p_0(0)}$ par l'unité, et d par $2l\operatorname{tg}\theta(0)$. Or, les expressions :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial C_{\mathfrak{N}}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} = \mathcal{F}(\theta, M_\infty, \gamma), \\ \left(\dfrac{\partial C_{\mathfrak{M}}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} = \mathcal{G}(\theta, M_\infty, \gamma), \end{cases} \tag{27}$$

relatives à des cônes de révolution sont connues [45] et l'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left(\theta(0), M_\infty, \gamma\right) = \dfrac{1}{\pi l^2\operatorname{tg}\theta(0)}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\int_0^l x\,dx\int_0^{2\pi} p_1(0)\cos^2\varphi\,d\varphi, \\ \mathcal{G}\left(\theta(0), M_\infty, \gamma\right) = \dfrac{1}{\pi l^3\operatorname{tg}\theta(0)}\,\dfrac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}\int_0^l \dfrac{x^2}{\cos^2\theta(0)}\,dx\int_0^{2\pi} p_1(0)\cos^2\varphi\,d\varphi, \end{cases} \tag{28}$$

d'où résulte :

$$(29)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial C_{\mathfrak{N}}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 4\dfrac{l}{d}\,\mathrm{tg}\,[\theta(0)]\;\mathcal{F}\left(\theta(0), M_\infty, \gamma\right)\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\,[2\mu_0(0)]}{\sin\left[2\mu_0\left(\frac{x}{l}\right)\right]}\,\frac{p_0(x/l)}{p_0(0)}\cdot\, f\left(\frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right), \\ \left(\dfrac{\partial C_{\mathfrak{M}}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 3\dfrac{l}{d}\sin\,[2\,\theta(0)]\;\mathcal{G}\left(\theta(0), M_\infty, \gamma\right)\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\,[2\mu_0(0)]}{\sin\left[2\mu_0\left(\frac{x}{l}\right)\right]}\,\frac{p_0(x/l)}{p_0(0)}\cdot \\ \qquad\qquad \cdot\left[\frac{x}{l}+\frac{d}{2l}f\left(\frac{x}{l}\right)\mathrm{tg}\,\theta\left(\frac{x}{l}\right)\right] f\left(\frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right). \end{cases}$$

Telles sont les formules de SAVIN. La variation d'entropie en fonction de α ayant été négligée pour établir (21), ces formules sont en réalité inexactes même compte tenu des approximations de la méthode de choc détente généralisée. En fait, il faut substituer à (21) la relation

$$(30)\qquad p_1\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{\sin 2\mu_0(0)}{\sin 2\mu_0(x/l)}\,\frac{p_0(x/l)}{p_0(0)}\,p_1(0) + \left(\frac{\sin 2\mu_0(0)}{\sin 2\mu_0(x/l)} - 1\right) p_0\left(\frac{x}{l}\right)\frac{S_1}{(\gamma-1)C_v}$$

si l'entropie à la surface de l'obstacle est

$$(31)\qquad S = S_0 - \alpha S_1 \cos\varphi.$$

Le terme S_1 qui ne dépend pas de x est donné par la théorie des écoulements coniques et il est facile d'expliciter les formules qui doivent remplacer (29). On voit que la validité des formules de SAVIN exige que l'on ait

$$(32)\qquad \frac{p_0(0)S_1}{p_1(0)(\gamma-1)C_v} \ll 1.$$

On notera toutefois que le second terme de (30) s'annulant à la pointe l'efficacité numérique des formules de SAVIN est en fait supérieure à ce que laisse prévoir strictement la condition (22). Pour un cône de 7° 30' de demi-ouverture, l'expression (32) vaut 0,049 pour $M_\infty \cong 5{,}1$ alors qu'elle vaut 0,24 pour $M_\infty \cong 8{,}1$. Il importe donc de ne pas extrapoler les formules de SAVIN trop loin vers les nombres de Mach élevés.

CHAPITRE III

THÉORIE HYPERSONIQUE DES PETITES PERTURBATIONS POUR L'ÉCOULEMENT SUR UN OBSTACLE PRÉSENTANT UN NEZ ÉMOUSSÉ

III,1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, les obstacles considérés étaient toujours doués de pointes ou d'arêtes parfaitement vives. Il en résulte que l'écoulement perturbé était limité en amont par une onde de choc attachée à une pointe ou une arête. En fait, ce n'était que dans un but de simplification que l'on admettait cette schématisation; dans la réalité les obstacles présentent tous des pointes ou des arêtes plus ou moins émoussées, soit que l'on ne soit pas maître, pour des raisons mécaniques, de réaliser un bord d'attaque parfaitement aigu, soit que, pour d'autres raisons, l'on ne désire pas descendre au-dessous d'une certaine valeur pour le rayon de courbure au point d'arrêt. La première éventualité est celle qui se présente lors des études de développement de couche limite sur plaque plane en soufflerie; la seconde éventualité se présente à propos de la rentrée d'un engin dans l'atmosphère, l'échauffement cinétique devenant de plus en plus sévère à mesure que diminue le rayon de courbure au point d'arrêt.

Ayant reconnu que le bord d'attaque, ou la pointe, d'un obstacle réel est toujours émoussé, il devient nécessaire d'examiner d'un point de vue critique la schématisation dont il a été question plus haut. Dans ce qui suit, et jusqu'à la section 4, il ne sera question que d'écoulements bidimensionnels sur profil plan ou ogive de révolution sans incidence. La question qui se pose est de savoir dans quelle mesure l'obstacle de la figure 1, comportant une pointe émoussée, peut être remplacé par l'obstacle idéalisé OPQ, comportant en O une pointe parfaitement vive. De manière plus précise, soit R un point sur la partie PQ du profil, à une certaine distance du point P, la question posée est la suivante : pour calculer la pression en R, commet-on une erreur négligeable en remplaçant l'obstacle réel par l'obstacle idéalisé, et dans le cas où la réponse est négative, comment faut-il s'y prendre pour calculer la pression agissant sur l'obstacle réel.

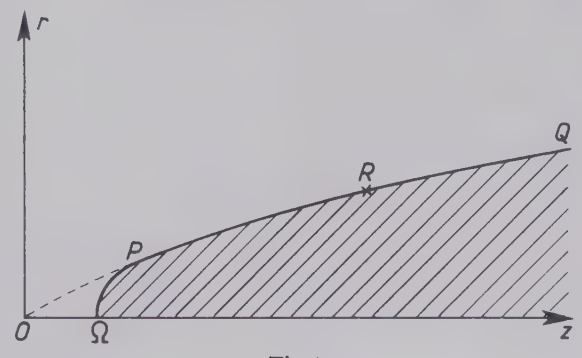


Fig.1

La présence d'une onde de choc détachée en amont de ΩP indique, dès l'abord, qu'il y a lieu de s'attendre à quelque effet dont l'importance croît avec le nombre de Mach comme le

montrent les considérations suivantes : chaque ligne de courant ($\mathfrak{L}$) est caractérisée par une valeur bien déterminée $\Delta S_{\mathfrak{L}}$ du saut d'entropie à la traversée de l'onde de choc; dans ces conditions l'on a, avec les notations de la figure 2, $\Delta S_{\mathfrak{L}_2} \gg \Delta S_{\mathfrak{L}_1}$, dès que $M_\infty \gg 1$. Ceci provient du fait que la ligne de courant ($\mathfrak{L}_2$) a traversé l'onde de choc dans une région où celle-ci fait un angle élevé avec la direction de l'écoulement incident, alors que pour la ligne ($\mathfrak{L}_1$) l'angle correspondant est faible. Ainsi, pour l'obstacle réel, à pointe émoussée, dès que le nombre de Mach est élevé, les lignes de courant situées au voisinage de l'obstacle transportent un saut d'entropie considérable, par rapport aux lignes de courant plus éloignées. Lorsque l'on se rapproche de la surface de l'obstacle, il n'est donc pas indifférent de supposer que la pointe est parfaitement vive, ou qu'elle est émoussée. En particulier, sur l'obstacle lui-même, l'entropie existant sur l'un des deux obstacles est beaucoup plus grande que celle existant sur l'autre. Soit $R = C_p - C_v$ la constante des gaz parfaits, le saut d'entropie $\Delta S = S_2 - S_1$ à la traversée d'un choc normal est de la forme

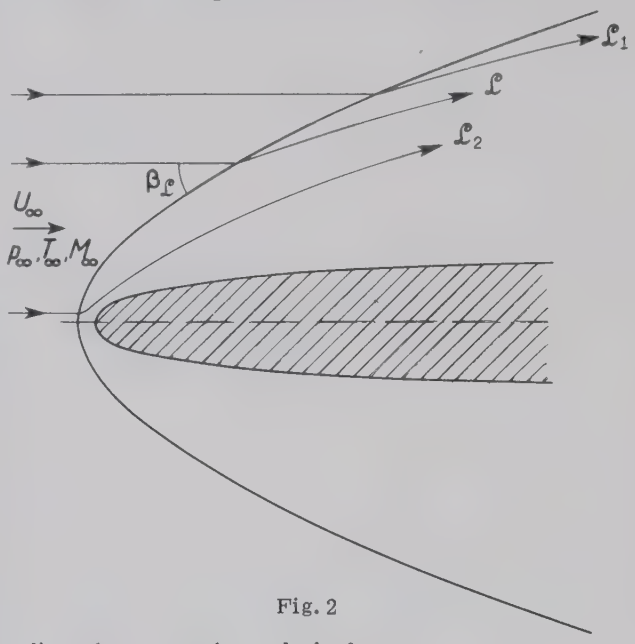


Fig. 2

$$\frac{\Delta S}{R} = \Sigma\left(M_1 ; p_1 , T_1\right), \tag{1}$$

où l'indice 1 caractérise les conditions amont. Dans la formule précédente, la dépendance principale est par rapport au nombre de Mach, et c'est même la seule lorsque le gaz est parfait; toutefois si une dissociation, ou une imperfection thermique est susceptible d'intervenir derrière le choc, le saut d'entropie, à nombre de Mach fixé, dépend, dans une certaine mesure, des conditions de pression et de température en amont; pour cette raison, l'on a fait dépendre explicitement Σ de p_1 et T_1 dans la formule (1). Soit $\theta_0 \ll 1$, l'inclinaison à la pointe du profil idéalisé de la figure 1; dans le cas plan, l'inclinaison β_0, en cette même pointe, de l'onde de choc attachée est donnée par la formule (17) du chapitre 1; dans ces conditions, pour la ligne de courant ($\mathfrak{L}_0$) léchant la surface de l'obstacle, si l'on caractérise par un accent l'obstacle idéalisé, et par l'absence d'accent l'obstacle réel, l'on a :

$$\frac{\Delta S_{\mathfrak{L}_0}}{R} = \Sigma\left(M_\infty ; p_\infty , T_\infty\right) \gg \Sigma\left(\frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta_0 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_\infty \theta_0\right)^2 + 1} ; p_\infty , T_\infty\right) = \frac{\Delta S'_{\mathfrak{L}_0}}{R}. \tag{2}$$

Ainsi, avec $p_\infty = 1$ atm, $M_\infty = 20$, $\theta_0 = 5°$ l'on trouve $\frac{\Delta S_{\mathfrak{L}_0}}{R} \simeq 14$ et $\frac{\Delta S'_{\mathfrak{L}_0}}{R} = 0{,}69$.

L'épaisseur $2a$ du bord d'attaque est définie, d'une manière quelque peu arbitraire, comme sur la figure 1. Soit, en écoulement plan,

$$\psi = \rho_\infty U_\infty \overline{\psi}, \tag{3}$$

la fonction de courant, nulle sur l'obstacle; $\overline{\psi}$ étant fixé ainsi que les conditions amont et la forme du profil idéalisé, a est considéré comme variable; alors le saut d'entropie est une fonction de l'abscisse z, de $\overline{\psi}$ et de a, de sorte que, dans une section d'abscisse déterminée, ΔS est une fonction de $\overline{\psi}$ et de a : $\Delta S(\overline{\psi}, a)$. Soit $\Delta S'(\overline{\psi})$ le saut d'entropie dans la même section pour le profil idéalisé, il est clair que, si $\overline{\psi}$ n'est pas nul, l'on a

$$\lim_{a \to 0} \Delta S_0(\overline{\psi}, a) = \Delta S'_0(\overline{\psi}); \quad (\overline{\psi} \neq 0) \tag{4}$$

mais, en vertu de

$$(5)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\bar\psi \to 0} \Delta S'_o(\bar\psi) = \Delta S'_{\mathcal{L}_o}, \\ \lim\limits_{\bar\psi \to 0} \Delta S_o(\bar\psi, a) = \Delta S_{\mathcal{L}_o}, \end{cases}$$

il vient

$$(6)\qquad \lim_{a \to 0} \lim_{\bar\psi \to 0} \Delta S_o(\bar\psi, a) = \Delta S_{\mathcal{L}_o} \neq \Delta S'_{\mathcal{L}_o} = \lim_{\psi \to 0} \lim_{a \to 0} \Delta S(\bar\psi, a).$$

Ainsi, lorsque l'épaisseur $2a$ de l'obstacle tend vers zéro, la convergence de l'écoulement sur le profil réel, vers l'écoulement sur le profil idéalisé, exprimée par (4) en ce qui concerne l'entropie, est non uniforme au voisinage de la paroi de l'obstacle. Le but du présent chapitre est de montrer que le phénomène de convergence non uniforme, exprimé par (6), a une répercussion considérable, sur l'ensemble de l'écoulement, dès que le nombre de Mach M_∞ de l'écoulement incident est suffisamment élevé. En toute rigueur, d'ailleurs, le phénomène de convergence non uniforme précédent existe dans tout écoulement supersonique. M. Maurice ROY [42] l'avait signalé, à une époque où il n'était pas question d'écoulements hypersoniques. Toutefois, dans un écoulement supersonique modéré, la répercussion de ce phénomène sur le niveau des pressions à la surface de l'obstacle est négligeable, ou du moins est-elle localisée au voisinage immédiat du nez émoussé. Par contre, aux vitesses hypersoniques, la pression peut être affectée, dans des proportions considérables, par l'existence d'un émoussement, la répercussion de celui-ci sur l'écoulement cessant d'être localisée au voisinage immédiat de l'émoussement.

Ainsi, en fluide parfait, l'écoulement sur une plaque plane, dont l'épaisseur est nulle, est-il uniforme. Lorsque la plaque présente quelque épaisseur, un écoulement supersonique modéré sur cette dernière, reste quasi uniforme, alors qu'un écoulement hypersonique est violemment perturbé : le niveau des pressions à la plaque plane peut être plusieurs fois supérieur au niveau des pressions dans l'écoulement incident. La notion de forte interaction visqueuse, que l'étude des écoulements hypersoniques a fait apparaître, procéde de remarques analogues : la convergence, vers un écoulement de fluide parfait, d'un écoulement d'un fluide dont la viscosité est évanescente, est non uniforme au voisinage de la paroi de l'obstacle. La couche limite qui en résulte a, généralement, une incidence très faible sur le niveau des pressions à la surface de l'obstacle. Toutefois, aux vitesses hypersoniques, l'influence de la couche limite sur le niveau des pressions peut être considérable dans certaines circonstances. Tel est le phénomène de forte interaction hypersonique entre onde de choc et couche limite. Dans la réalité, forte interaction visqueuse et émoussement peuvent intervenir simultanément, toutefois, dans le présent chapitre, tout phénomène de viscosité sera négligé. Il est clair, en effet, qu'une bonne connaissance de chaque phénomène, considéré isolément, est souhaitable pour aborder l'étude de leur influence mutuelle. La forte interaction visqueuse est maintenant bien connue, grâce notamment aux travaux de STEWARTSON [46]. L'influence d'un émoussement a également fait l'objet de nombreux travaux, notamment par LEES et KUBOTA [35], KUBOTA [31], CHERNYI [4-5] CHENG [1]; toutefois, bien que la liaison entre ce phénomène et la convergence non uniforme précédemment décrite, ait été reconnue par les auteurs précédents, l'analyse systématique de cette question paraît n'avoir pas encore été abordée. Dans une communication personnelle CHENG* nous a signalé qu'il avait récemment obtenu des résultats analogues à ceux qui sont établis dans le présent chapitre. D'une manière plus précise, les travaux cités utilisent comme point de départ un problème aux limites relatif à la théorie hypersonique des petites perturbations, problème aux limites, que des considérations intuitives, d'ordre énergétique, intéressantes mais incomplètes, avaient permis de dégager. En fait, le but essentiel du présent chapitre est de déterminer, au moyen d'une analyse fine

---

* Depuis que cette publication a été rédigée le mémoire de CHENG est paru : IAS 60 - 38.

de l'écoulement, à quel problème aux limites de la théorie des petites perturbations, se ramène l'étude de l'écoulement sur un obstacle présentant un émoussement. A la suite de cette analyse, il apparaîtra que le problème aux limites utilisé dans les travaux cités n'est pas, en toute rigueur, correct, lorsqu'il s'agit de traduire l'influence d'un émoussement.

Dans le but d'introduire quelque règle de similitude dans les écoulements considérés, il est utile de définir une classe d'obstacles ne dépendant que d'un nombre limité de paramètres. Deux paramètres numériques τ et a fixent respectivement l'épaisseur relative du profil idéalisé et l'importance relative –par rapport à la corde du profil prise pour unité de longueur– de l'épaisseur $2a$ du nez émoussé. Ainsi l'obstacle idéalisé, profil plan ou ogive de révolution, est défini par son équation

(7) $$r = \tau f(z), \qquad 0 < z < 1 .$$

La pointe émoussée de l'obstacle réel a une forme fixée –par exemple calotte sphérique– elle se raccorde à l'obstacle idéalisé en $z = z_0 \ll 1$, et d'après la figure 1 l'épaisseur $2a$ du bord d'attaque est donc précisée par

(8) $$a = \tau z_0 f'(0) .$$

Sont considérés, dans la suite, comme fixés, d'une part la fonction $f(z)$, d'autre part la forme du bord d'attaque, forme qui n'est pas précisée, tout en étant désignée symboliquement par la notation $\mathcal{F}$; les paramètres τ, a et le nombre de Mach M_∞ sont par contre supposés variables. D'une manière précise, il s'agit de construire une théorie asymptotique destinée à représenter la situation limite obtenue lorsque, simultanément, $a \to 0$, $\tau \to 0$, $M_\infty \to \infty$, ces trois paramètres étant liés par deux relations. La première de ces relations est évidente d'après le chapitre I :

(9) $$M_\infty \tau = k \qquad 0 < k < +\infty$$

quand à la seconde relation, ce n'est qu'au terme de la présente étude que sa forme pourra être précisée.

La théorie trouve son point de départ dans la constatation déjà faite sur la figure 2, à savoir : $\Delta S_{\mathcal{L}_2} \gg \Delta S_{\mathcal{L}_1}$. Soit $\beta_{\mathcal{L}}$ l'inclinaison de l'onde de choc, au point où elle est rencontrée par la ligne de courant $(\mathcal{L})$, d'après (1) l'on a

(10) $$\frac{\Delta S_{\mathcal{L}}}{R} = \sum (M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}}; p_\infty, T_\infty) .$$

Il résulte de la référence [40] que, lorsque M_1 dépasse environ 3, le saut d'entropie à la traversée d'un choc normal est donné avec une bonne approximation par

(11) $$\sum (M_1 ; p_1, T_1) = A(p_1, T_1)\,[M_1 - B(p_1, T_1)]$$

Ainsi lorsque $M_\infty \gg 1$, il est clair que pour une ligne de courant du type ($\mathcal{L}_1$), caractérisée par

(12) $$M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}} = 0(1), \qquad (\mathcal{L}_1)$$

l'on a

(13) $$\frac{\Delta S_{\mathcal{L}_1}}{R} = 0(1),$$

alors que pour une ligne de courant du type ($\mathcal{L}_2$) caractérisée par

(14) $$\sin \beta_{\mathcal{L}} = 0(1), \qquad (\mathcal{L}_2)$$

l'on a

(15) $$\frac{\Delta S_{\mathcal{L}_2}}{R} = 0(M_\infty) .$$

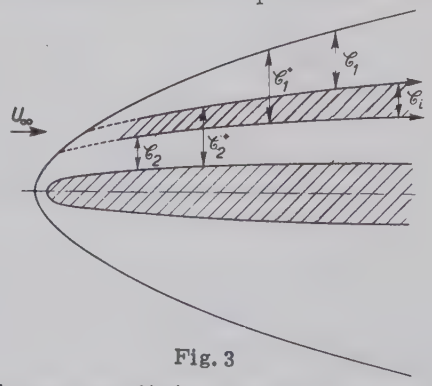


Fig. 3

Dans ces formules, 0(1) désigne une expression qui tend vers une limite finie et non nulle lorsque $M_\infty \to \infty$, de même $0(M_\infty)$ désigne une expression dont le rapport à M_∞ tend vers une limite finie et non nulle lorsque $M_\infty \to \infty$.

D'après (13) et (15) il est tout naturel de partager les lignes de courant en deux classes : la classe $(\mathcal{C}_1)$ est constituée par les lignes de courant du type $(\mathcal{L}_1)$ vérifiant (12), alors que la classe $(\mathcal{C}_2)$ est constituée par les lignes de courant du type $(\mathcal{L}_2)$ vérifiant (14). Suivant une terminologie qui se comprend d'elle-même, il est commode de dire que le domaine balayé par les lignes de courant de la classe $(\mathcal{C}_1)$, derrière l'onde de choc de tête, forme la couche externe, et que le domaine balayé par les lignes de courant de la classe $(\mathcal{C}_2)$ forme la couche interne. Il est clair que la couche externe relève directement de la théorie hypersonique des petites perturbations dont il a été question au chapitre I. Il n'y a pas de remarque fondamentalement nouvelle à formuler au sujet de la couche externe, de sorte que le but poursuivi ici est plus spécialement de faire l'étude de la couche interne et de déterminer son raccordement avec la couche externe. Cette question du raccordement entre les deux couches est éclaircie par les idées de KAPLUN [29]. Selon cet auteur, le raccordement est effectué en introduisant une nouvelle classe $(\mathcal{C}_i)$ de lignes de courant $(\mathcal{L}_i)$ formant ce que l'on peut appeler la couche intermédiaire. Soient $\delta_1(M_\infty)$ et $\delta_2(M_\infty)$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{M_\infty \to \infty} \delta_1(M_\infty) = \lim\limits_{M_\infty \to \infty} \delta_2(M_\infty) = 0, \\ \lim\limits_{M_\infty \to \infty} M_\infty \delta_2(M_\infty) = \lim\limits_{M_\infty \to \infty} \dfrac{\delta_1(M_\infty)}{\delta_2(M_\infty)} = \infty ; \end{cases}$$

la considération de ces fonctions permet de définir une couche externe étendue et une couche interne étendue de la manière suivante. La couche externe étendue est le domaine balayé par les lignes de courant du type $(\mathcal{L}_1^*)$, formant la classe $(\mathcal{C}_1^*)$, caractérisées par la condition

$$(12^*)\qquad \sin \beta_{\mathcal{L}} \leqslant 0\left(\delta_1(M_\infty)\right), \qquad (\mathcal{C}_1^*)$$

laquelle indique que le rapport $\dfrac{\sin \beta_{\mathcal{L}}}{\delta_1(M_\infty)}$ tend, lorsque $M_\infty \to \infty$, vers une limite finie, peut être nulle.

Il est clair que la classe $(\mathcal{C}_1^*)$ contient la classe $(\mathcal{C}_1)$ dont elle fournit donc une extension, ceci d'après (16). De la même manière la couche interne étendue est le domaine balayé par les lignes de courant du type $(\mathcal{L}_2^*)$, formant la classe $(\mathcal{C}_2^*)$, caractérisées par la condition

$$(14^*)\qquad \sin \beta_{\mathcal{L}} \geqslant 0\left[\delta_2(M_\infty)\right]$$

Laquelle indique que le rapport $\sin \beta_{\mathcal{L}}/\delta_2(M_\infty)$ tend vers une limite non nulle, peut être infinie. D'après (16) la classe $(\mathcal{C}_2^*)$ contient la classe $(\mathcal{C}_2)$ dont elle fournit donc une extension.

Maintenant, d'après la dernière condition (16), les classes $(\mathcal{C}_1^*)$ et $(\mathcal{C}_2^*)$ ont des lignes de courant en commun; autrement dit la couche externe étendue et la couche interne étendue se recouvrent, et le domaine de recouvrement constitue précisément la couche intermédiaire. Cette dernière n'est autre que le domaine balayé par les lignes de courant du type $(\mathcal{L}_i)$, appartenant à la classe intermédiaire $(\mathcal{C}_i)$, caractérisées par la condition

$$(17)\qquad \begin{cases} \sin \beta_{\mathcal{L}} = 0[\delta(M_\infty)], \\ 0 \leqslant \lim\limits_{M_\infty \to \infty} \dfrac{\delta(M_\infty)}{\delta_1(M_\infty)} < +\infty, \qquad (\mathcal{C}_i) \\ 0 < \lim\limits_{M_\infty \to \infty} \dfrac{\delta(M_\infty)}{\delta_2(M_\infty)} \leqslant +\infty . \end{cases}$$

Ces considérations un peu abstraites sont illustrées schématiquement sur la figure 3.

D'après les idées de KAPLUN [29], le type d'écoulement est différent selon qu'il s'agit de la couche interne ou de la couche externe, la raison de ce fait, dans le cas actuel, tenant

essentiellement à la convergence non uniforme exprimée par (6). Dans la couche externe l'écoulement est du type décrit dans le chapitre I, alors que dans la couche interne, l'écoulement est du type écoulement de source comme nous le verrons. L'écoulement externe n'est pas valable dans la couche interne et réciproquement l'écoulement interne n'est pas valable dans la couche externe. Mais, si l'écoulement externe reste valable dans la couche externe étendue, et si l'écoulement interne est valable dans la couche interne étendue, alors en écrivant que les deux écoulements coïncident dans la couche intermédiaire, des conditions de raccord entre les deux couches sont ainsi obtenues. Tel est le programme que l'on s'efforcera de mener à bien dans la section 2 de ce chapitre, mais auparavant l'on va montrer comment quelques considérations simples permettent de prévoir *a priori* la forme du résultat.

Soient p, ρ, S la pression, la masse spécifique et l'entropie spécifique du gaz; il sera admis, dans toute la suite, que les propriétés thermodynamiques du gaz peuvent être représentées par une équation d'état du type :

$$p = \rho^{\bar{\gamma}} F(S) \tag{18}$$

où $\bar{\gamma}$ désigne un exposant adiabatique fictif moyen. Cet exposant adiabatique peut être différent du rapport des chaleurs spécifiques du gaz dans l'écoulement incident; il est même possible, grâce à une modification triviale des formules obtenues dans ce chapitre, d'utiliser deux exposants adiabatiques différents pour la couche interne et pour la couche externe. Toutefois, bien que les idées développées ici ne dépendent pas de l'adoption d'une loi telle que (18), les formules finales obtenues doivent essentiellement leur simplicité au fait que la pression est le produit de la masse spécifique par une fonction de l'entropie spécifique. Soit U_∞ la vitesse de l'écoulement incident, et soit

$$\vec{V} = U_\infty \bar{V} \vec{t}, \qquad \vec{t}^{\,2} = 1, \tag{19}$$

le vecteur vitesse dans la couche interne. Soient $\vec{z}$ et $\vec{r}$ les vecteurs unitaires des axes oz et or, respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction de l'écoulement incident. Il est possible de se convaincre, et une démonstration en sera donnée dans la section 2, de l'exactitude des relations asymptotiques

$$\begin{cases} \bar{V} \cong 1, \\ \vec{t} \cong \vec{z}; \end{cases} \tag{20}$$

d'autre part, il est également possible de se convaincre que la pression dans la couche interne ne dépend que de la variable z. Soit alors $p = p_\infty P(z)$ la valeur de la pression au point d'abscisse z sur l'obstacle; en caractérisant par l'indice 2 la couche interne l'on a ainsi

$$p_2(z, r) \cong p_\infty P(z). \tag{21}$$

Considérons, dans la couche interne, deux lignes de courant voisines, distantes de $\delta n(z)$, et soit δn_∞ la distance correspondante de ces lignes de courant dans l'écoulement amont; en introduisant, suivant un procédé classique, $\varepsilon = 0{,}1$ pour distinguer les écoulements plan des écoulements de révolution, la conservation de la masse permet d'écrire :

$$\rho \bar{V} r^{\varepsilon} \delta n(z) = \rho_\infty r_\infty^{\varepsilon} \delta n_\infty. \tag{22}$$

En faisant usage de (18), (20) et (21) dans (22), il vient

$$\delta n(z) \cong [P(z)]^{-\frac{1}{\bar{\gamma}}} G(S) \left(\frac{r_\infty}{r}\right)^{\varepsilon} \delta n_\infty, \tag{23}$$

après avoir posé

$$G(S) = \left(\frac{F(S)}{F(S_\infty)}\right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}. \tag{24}$$

Une ligne de courant déterminée est bien caractérisée par la valeur r_∞ de sa distance à l'axe dans l'écoulement incident, de sorte que l'ordonnée r d'un point de la couche interne est

une fonction de z et de r_∞ : $r(z, r_\infty)$. Maintenant, en remarquant que $\delta n_\infty \simeq \delta r_\infty$ et $\delta n \cong \delta r$, et en considérant S comme fonction de r_∞ dans la couche interne, l'intégration de (22) donne

$$r(z, r_\infty) = \left\{ [\tau f(z)]^{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)[P(z)]^{-\frac{1}{\gamma}} \int_0^{r_\infty} G[S(t)]\, t^\varepsilon\, dt \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \tag{25}$$

En substituant (10) dans l'expression de $G(S)$, il est clair qu'il est possible de relier la valeur de G à la valeur du nombre de Mach normal $M_\infty \sin\beta$:

$$G(S) = \Gamma(M_\infty \sin\beta;\ p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}). \tag{26}$$

Le long de l'onde de choc de tête, r_∞ est fonction de β :

$$r_\infty = a g(\beta, M_\infty;\ p_\infty, T_\infty, \mathcal{F}). \tag{27}$$

Dans ces conditions, l'équation (25) montre que l'équation d'une ligne de courant ($\mathcal{L}_2$) de la couche interne est de la forme

$$r_{\mathcal{L}_2}(z) = \left\{ [\tau f(z)]^{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)[P(z)]^{-\frac{1}{\gamma}} a^{1+\varepsilon} \int_{\beta_{\mathcal{L}_2}}^{\pi/2} P(M_\infty \sin\beta; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma})\, g^\varepsilon(\beta, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty; \mathcal{F}) \cdot \frac{\partial g}{\partial \beta}\, d\beta \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \tag{28}$$

La formule précédente est valable dans la couche interne, c'est-à-dire lorsque $\beta_{\mathcal{L}}$ vérifie la condition (14), mais elle est également valable dans la couche interne étendue, et en particulier dans la couche intermédiaire. Ainsi, en faisant $\beta_{\mathcal{L}} = \delta(M_\infty)$ dans (28), l'équation d'une ligne de courant ($\mathcal{L}_i$) de la couche intermédiaire est obtenue. Or, il est possible de se convaincre, et des arguments dans ce sens seront présentés ultérieurement, que la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{M_\infty \to \infty} \frac{\int_{\delta_2}^{\delta_1} \Gamma g^\varepsilon dg}{\int_{\delta_2}^{\pi/2} \Gamma g^\varepsilon dg} = 0 \tag{29}$$

de sorte que, asymptotiquement, la couche intermédiaire se réduit à une seule ligne de courant. D'une manière précise, si une fonction $\alpha_\varepsilon(M_\infty, p_\infty, T_\infty; \mathcal{F})$ est définie par la relation

$$\alpha_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) = \int_{\delta(M_\infty)}^{\pi/2} \Gamma(M_\infty \sin\beta;\ p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma})\, g^\varepsilon(\beta, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty; \mathcal{F})\, \frac{\partial g}{\partial \beta}\, d\beta \tag{30}$$

il est clair que, asymptotiquement, toute la couche intermédiaire se réduit à la seule ligne de courant

$$r_{eff}(z) = \left\{ [\tau f(z)]^{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon a^{1+\varepsilon} \left(\frac{p_\infty}{p(z)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \cdot \quad (\mathcal{L}_i) \tag{31}$$

En apparence, la formule (29) fait dépendre α_ε de la valeur de $\delta(M_\infty)$, mais ce n'est qu'une apparence. En effet, si α'_ε et α''_ε correspondent à deux fonctions différentes $\delta'(M_\infty)$ et $\delta''(M_\infty)$ vérifiant (17), il est clair que la condition (29) entraîne

$$\lim_{M_\infty \to \infty} \frac{\alpha''_\varepsilon(M_\infty)}{\alpha'_\varepsilon(M_\infty)} = 1, \tag{32}$$

de sorte que, asymptotiquement, $\alpha_\varepsilon(M_\infty ; p_\infty , T_\infty , \gamma_\infty , \bar{\gamma} ; \mathcal{F})$ est parfaitement bien définie par (30), la dépendance par rapport à $\delta(M_\infty)$ n'étant pas effective.

La ligne de courant (31), à laquelle se réduit toute la couche intermédiaire, joue évidemment le rôle de frontière commune aux deux couches. Pour la couche externe elle joue le rôle d'obstacle fictif. En termes d'équations aux dérivées partielles, (31) est l'une des conditions aux limites pour les équations de l'écoulement externe.

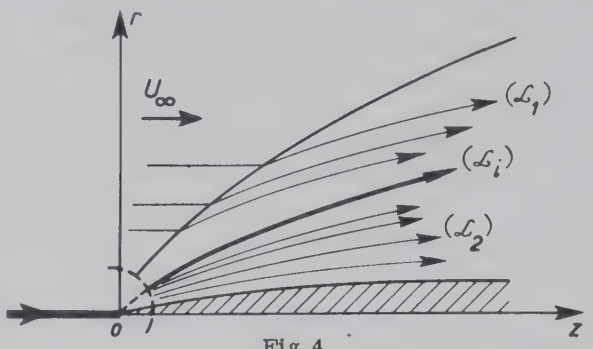


Fig. 4

Il est maintenant possible de se représenter, dans son ensemble, l'écoulement obtenu; cela est indiqué sur la figure 4 qui s'explique d'elle-même d'après ce qui précède. Il faut toutefois noter que le voisinage immédiat du bord d'attaque (intérieur du cercle tracé sur la figure 4) est exclu de cette représentation. La théorie construite est doublement asymptotique : d'une part elle n'est valable que à la limite pour $M_\infty = \infty$, d'autre part elle n'est également valable que loin du bord d'attaque. Il est évident que le détail de l'écoulement dans la région du bord d'attaque a un rôle à jouer, et c'est pour cela que la dépendance de α_ε par rapport à la forme du bord d'attaque $\mathcal{F}$ a été explicitement mentionnée dans la formule (30), mais il est tout à fait remarquable que ce rôle est essentiellement limité à la détermination du coefficient α_ε (quelques réserves à ce sujet seront formulées dans le § 2.8).

Quelques éclaircissements, au sujet de la condition (29) ne seront probablement pas inutiles. Si l'on s'intéresse uniquement au développement formel de la théorie présentée ici, il est possible d'adopter l'attitude qui consiste à considérer (29) comme une hypothèse, ce qui revient à dire que l'influence du bord d'attaque est telle que la décrit la théorie actuelle sous réserve que l'hypothèse (29), relative à l'écoulement dans la région du bord d'attaque, soit vérifiée. Mais cette attitude n'est pas très satisfaisante pour l'aérodynamicien, et il vaut mieux essayer de voir s'il est possible de se convaincre de la validité de (29). En principe la vérification en question nécessite la connaissance des fonctions Γ et g. En ce qui concerne Γ, la question est résolue par (11) si l'on adopte

$$G(S) = \exp\left(\frac{S - S_\infty}{\bar{\gamma}\ C_v}\right), \tag{33}$$

en effet, il vient alors

$$\Gamma = \exp\left\{\frac{\gamma_\infty - 1}{\bar{\gamma}}\, A(p_\infty , T_\infty)\,[M_\infty \sin\beta - B(p_\infty , T_\infty)]\right\} \tag{34}$$

En ce qui concerne g, la question est plus délicate car cela nécessite la connaissance de la forme de l'onde de choc, laquelle connaissance est en principe équivalente à la solution complète du problème. Toutefois, dans le but d'estimer la validité de (29), il est possible de se contenter d'une estimation très grossière pour la forme de l'onde de choc. La représentation de l'onde de choc en écoulement newtonien, d'après LIGHTHILL [36], est intéressante en raison de sa simplicité. Le nez de l'ogive de révolution est une calotte sphérique de rayon a; dans ces conditions, selon LIGHTHILL, l'onde de choc reste confondue avec la calotte sphérique tant que $\beta \geqslant 30^\circ$, puis s'en sépare au delà, en suivant les courbes d'équation

$$r^2 - \frac{3}{2}a^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 (\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\beta_0)\, a^2. \tag{35}$$

Dans ces conditions, l'expression intervenant sous le signe $\int$ dans (29) s'explicite comme suit

$$\left|\Gamma g \frac{\partial g}{\partial \beta}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\exp\left[\dfrac{\gamma_\infty - 1}{\bar{\gamma}} A\,(M_\infty \sin\beta - B)\right]}{\sin^2\beta}, \tag{36}$$

et il est clair que la présence du terme exponentiel suffit à assurer la validité de (29).

Quelques calculs permettent d'ailleurs de se rendre compte que la condition (29) n'est réalisée d'une manière satisfaisante que pour des valeurs extrêmes de M_∞ –au moins de l'ordre de 20–; cela ne veut d'ailleurs pas dire que la théorie ne soit pas utilisable pour des nombres de Mach raisonnables –de l'ordre de 10–, mais elle ne présente alors plus le même caractère de rigueur. Les aérodynamiciens sont parfaitement accoutumés à utiliser –sur une base plus ou moins empirique– des théories asymptotiques en dehors du domaine où elles sont raisonnablement fondées.

Il est encore possible de présenter la question sous l'aspect plus intuitif suivant. Une fonction de courant adimensionnelle est introduite grâce à la formule

(37) $$\psi = \rho_\infty U_\infty a^{1+\varepsilon} \tilde{\psi}.$$

Après avoir posé

(38) $$G[S(\rho_\infty U_\infty a^{1+\varepsilon}\tilde{\psi})] = \tilde{G}(\tilde{\psi}),$$

il est clair que la définition (30) de α_ε prend la forme

(39) $$\alpha_\varepsilon = \int_0^{\tilde{\psi}_0} \tilde{G}(\tilde{\psi})\, d\tilde{\psi}.$$

La borne supérieure $\tilde{\psi}_0$ est caractérisée par la condition assez vague suivante : pour $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0$ l'on a simultanément $\sin\beta \ll 1$ et $M_\infty \sin\beta \gg 1$. Mais, la légère incertitude qui en résulte sur α_ε est sans incidence appréciable sur la valeur de α_ε dès que M_∞ est de l'ordre de 20, étant donnée la forme en cloche très accentuée de la fonction $\tilde{G}$. La courbe représentative de cette fonction est indiquée sur la figure 5 dans les conditions suivantes :

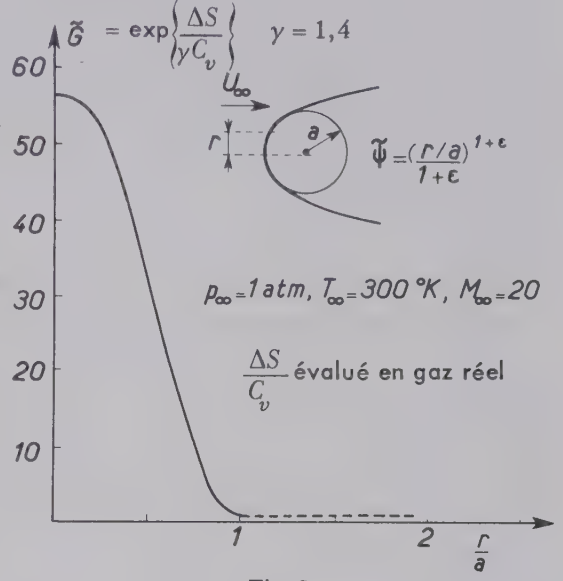


Fig. 5

$M_\infty = 20$, $p_\infty = 0{,}1$ atm., $T_\infty = 300°$ K

et avec la représentation newtonienne (35) de l'onde de choc. Pour un gaz parfait avec $\gamma = 1{,}4$ – conditions dans une soufflerie froide – $M_\infty = 20$ ne paraît pas même être suffisant pour la validité de (29), le saut d'entropie étant nettement plus faible que pour un gaz réel dissocié.

Avec (31), le lecteur est maintenant en possession de la formule fondamentale de la théorie; s'il ne s'intéresse pas aux aspects techniques de la question, et se contente des explications précédentes, il peut fort bien passer sur la presque totalité de la section 2 et reprendre la lecture directement au §2.8, qui sert de conclusion à cette section, et pose le problème aux limites fondamental de la théorie des petites perturbations pour un obstacle à nez émoussé. Quelques résultats numériques relatifs aux valeurs de α_ε sont également donnés au cours du §2.8.

Pour illustrer la théorie, quelques applications sont examinées dans la section 3. Le problème aux limites posé au §2.8 ne se laisse pas traiter par des méthodes exactes, de sorte que pour traiter ce problème il est nécessaire de faire appel à des méthodes approchées. La méthode utilisée ici est celle qui fut décrite dans le §I.2 sous le nom d'approximation tangentielle. En utilisant cette méthode, la détermination de la répartition des pressions sur un obstacle de forme arbitraire se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, intégration qui doit en règle générale s'effectuer numériquement. Lorsque l'obstacle est un dièdre l'intégration se ramène aux quadratures. Seul le cas de la plaque plane est entièrement résolu numériquement ici. Une autre application est plus intéressante du point de vue théorique. Il s'agit d'étudier l'écoulement dans le voisinage du nez : dans la région où les pressions induites sur l'obstacle par l'effet d'émoussement, sont considérables par rapport

aux pressions existant sur l'obstacle idéalisé non émoussé. Dans cette région l'obstacle réel peut être remplacé par une plaque plane ou un cylindre émoussés, de sorte que la solution correspondante présente un caractère de solution type applicable à n'importe quelle situation. En outre, l'obtention d'une telle solution présente un intérêt considérable, même d'un point de vue pratique, car la résolution, par voie numérique à l'aide de la méthode des caractéristiques, du problème aux limites posé au §2.8 se heurte à la question des conditions initiales. La connaissance d'une solution valable dans le voisinage du nez est une condition essentielle pour pouvoir démarrer le calcul. Il n'est pas possible d'obtenir sous forme explicite une telle solution, du moins si une solution exacte est recherchée. Par contre l'approximation newtonienne est suffisamment simple pour conduire à une solution explicite. Seule la première approximation, correspondant à $\bar{y} = 1$ est développée ici, mais il serait particulièrement intéressant de développer au moins une seconde approximation. D'abord pour gagner en efficacité numérique, mais aussi pour tenter d'éclaircir certaines difficultés soulevées par la première approximation. En première approximation, la solution n'est pas strictement déterminée, car l'on a le choix entre une solution homogène et toute une famille à un paramètre de solutions qui ne le sont pas. Un argument d'ordre physique, qui est peut-être fallacieux, et surtout la simplicité, conseillent d'opter pour la solution homogène. La considération d'une approximation d'ordre supérieur pourrait peut-être donner des indications utiles à ce sujet. Une chose est certaine : la solution exacte n'est pas homogène. Dans ces conditions la question se pose de comprendre par quel mécanisme l'homogénéité est détruite en passant aux approximations d'ordre supérieur.

Pour terminer ce chapitre, l'extension de la théorie aux écoulements tridimensionnels est envisagée dans la section 4. Les notions de couche interne et de couche externe sont toujours valables, mais le point important est que le concept d'écoulement par tranches longitudinales, qui a été justifié au §I.1, s'il reste valable pour la couche externe, cesse de l'être pour la couche interne. Dans cette dernière les lignes de courant ont tendance à être déviées vers les zones de plus faibles pressions, de sorte que la couche interne doit s'épaissir là où la pression a tendance à être plus faible. Ainsi l'effet de l'émoussement a-t-il tendance à diminuer les gradients de pression transversaux. Bien que la théorie développée dans la section 4 soit limitée au cas des ailes, les mêmes conclusions sont probablement valables pour les corps fuselés en incidence. Il en résulte que l'influence de l'effet d'émoussement doit être de diminuer la portance des corps fuselés.

III,2. EXPOSÉ SYSTÉMATIQUE.

III,2.1. *ÉQUATIONS GÉNÉRALES.*

Les écoulements plans et les écoulements de révolution sans incidence sont traités simultanément; cela nécessite seulement l'introduction du nombre ε défini par :

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ pour un écoulement plan,} \\ 1 \text{ pour un écoulement de révolution.} \end{cases} \tag{1}$$

Les axes *oz* et *or* sont rectangulaires, *oz* étant parallèle à la direction de l'écoulement incident; l'équation de l'obstacle est donnée par la formule (1.7) et l'épaisseur de son bord d'attaque $2a$ par (1.8). La pression, la masse spécifique, l'enthalpie spécifique, et l'entropie spécifique sont notées p, ρ, h, S. L'écoulement incident est caractérisé par l'indice ∞. Les caractéristiques thermodynamiques p, ρ, S sont liées par la relation (1.18). Le vecteur vitesse de l'écoulement est noté :

$$\vec{V} = U_\infty \bar{V} \{ \vec{z} \cos\theta + \vec{r} \sin\theta \} \tag{2}$$

où U_∞ désigne la vitesse dans l'écoulement incident.

Conjointement aux coordonnées cartésiennes (r, z), des coordonnées curvilignes orthogonales (x_1, x_2) seront également utilisées, définies de la manière suivante. Les lignes $x_2 = \text{Cte}$ sont confondues avec les lignes de courant, et les lignes $x_1 = \text{Cte}$ en sont les trajectoires orthogonales. Le système de coordonnées (x_1, x_2) est alors complètement précisé par la condition :

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dfrac{r^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \end{cases} \qquad \text{dans l'écoulement incident,}$$

x_2 étant nul sur l'obstacle.

Dans le système de coordonnées considéré, les équations aux dérivées partielles du mouvement se subdivisent en deux groupes : un groupe d'équations géométriques qui permettent d'effectuer le passage des coordonnées curvilignes (x_1, x_2) aux coordonnées cartésiennes et un groupe d'équations mécaniques constituées par les équations habituelles du mouvement.

Equations géométriques. Soient h_1 et h_2 les coefficients de la métrique

$$(4) \qquad dr^2 + dz^2 = (h_1\, dx_1)^2 + (h_2\, dx_2)^2,$$

il est clair que

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x_1} = h_1 \sin\theta, & \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = h_1 \cos\theta, \\ \dfrac{\partial r}{\partial x_2} = h_2 \cos\theta, & \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = -h_2 \sin\theta, \end{cases}$$

d'où, par différentiation

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial x_1}, & a) \\ \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2}. & b) \end{cases}$$

On peut remarquer que l'équation :

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

laquelle est une conséquence immédiate de (6), exprime que la métrique riemanienne (4) est à courbure nulle.

Equations mécaniques. Soient

$$(8) \qquad \begin{cases} \vec{\tau} = \vec{z}\cos\theta + \vec{r}\sin\theta, \\ \vec{\nu} = -\vec{z}\sin\theta + \vec{r}\cos\theta, \end{cases}$$

de sorte que, d'après (2), l'on a $\vec{V} = U_\infty \bar{V}\vec{\tau}$. Le fluide étant non visqueux, non conducteur de la chaleur et en mouvement permanent, si S désigne son entropie spécifique et h son enthalpie spécifique, il est bien connu que les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$(9) \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0, \\ \vec{\nu}\cdot\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nu}\cdot(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}) = 0, \\ \vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}S = \vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}(p\rho^{-\bar{\gamma}}) = 0, \\ V^2 + 2h = U_\infty^2\left(1 + \dfrac{2}{\gamma_\infty - 1}\dfrac{1}{M_\infty^2}\right). \end{cases}$$

Un calcul tout à fait simple, permet d'établir, dans le cas des écoulements bidimensionnels, plans ou de révolution, la relation

$$h_1 h_2 \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho V h_2 r^{\varepsilon}). \tag{10}$$

Maintenant, d'après

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \vec{\nu} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{11}$$

il vient

$$\vec{\nu} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\vec{V}) = V^2 \vec{\nu} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla}\vec{\tau}) = \frac{V^2}{h_1}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}. \tag{12}$$

Finalement, après avoir fait usage de (3) pour déterminer la constante d'intégration de (10), et après avoir utilisé (11) (12), le système (9) peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \rho V h_2 r^{\varepsilon} = \rho_\infty U_\infty, & a) \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = -\dfrac{\rho_\infty U_\infty V}{h_1 r^{\varepsilon}}\dfrac{\partial \theta}{\partial x_1}, & b) \\ \dfrac{\partial S}{\partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}(p\rho^{-\bar{\gamma}}) = 0, & c) \\ V^2 + 2h = U_\infty^2\left(1 + \dfrac{2}{\gamma_\infty - 1}\dfrac{1}{M_\infty^2}\right). & d) \end{cases} \tag{13}$$

Les équations aux dérivées partielles (5) et (13) doivent être assorties de conditions aux limites sur l'obstacle et sur l'onde de choc, qui vont être examinées.

Conditions aux limites sur l'obstacle. Soient

$$\begin{cases} z(x_1, o) = Z(x_1), & r(x_1, o) = R(x_1), \\ \theta(x_1, o) = \Theta(x_1), & h_1(x_1, o) = H_1(x_1); \end{cases} \tag{14}$$

les fonctions Z, Θ, R, H_1, sont *a priori* inconnues, mais il existe entre elles les trois relations suivantes, conséquences de (1.7) et de (5) :

$$\begin{cases} R(x_1) = \tau f[Z(x_1)], \\ \Theta(x_1) = \mathrm{Artg}\,[\tau f'\{Z(x_1)\}] \\ H(x_1) = \left\{Z'^2(x_1) + R'^2(x_1)\right\}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{15}$$

lesquelles sont les conditions aux limites relatives à l'obstacle.

Conditions aux limites sur l'onde de choc. Soit *

$$r = g(z), \tag{16}$$

l'équation de l'onde de choc, dont la forme est une inconnue du problème. La pente de l'onde de choc est introduite sous la forme

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{dg}{dz}, \tag{17}$$

Dans le plan (x_1, x_2), d'après (3), l'équation de l'onde de choc est

$$x_2 = \frac{[g(x_1)]^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}, \quad x_1 = z. \tag{18}$$

---

* La fonction $g(z)$ ainsi introduite ne doit pas être confondue avec la fonction $g(\beta)$ qui a été introduite en (1.27) et qui ne sera plus utilisée sauf au § 2.6.

Dans ces conditions les valeurs de p/p_∞ et ρ/ρ_∞ sur l'onde de choc sont déterminées par le système suivant :

$$(19)\qquad \begin{cases} p/p_\infty + \gamma_\infty \dfrac{\rho_\infty}{\rho} M_\infty^2 \sin^2\beta = 1 + \gamma_\infty M_\infty^2 \sin^2\beta, \\ \left(\dfrac{\rho_\infty}{\rho}\right)^2 + \dfrac{2\bar\gamma}{\bar\gamma - 1} \dfrac{p}{p_\infty} \dfrac{\rho_\infty}{\rho} \dfrac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2 \sin^2\beta} = 1 + \dfrac{2}{\gamma_\infty - 1} \dfrac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}, \end{cases}$$

alors que V, θ, h_1 et h_2 sont donnés par les équations

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(\beta-\theta)}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\rho_\infty}{\rho}, \qquad \dfrac{V}{U_\infty} = \dfrac{\cos(\beta-\theta)}{\cos\beta} = h_1, \\ h_2 r^\varepsilon = \dfrac{\sin(\beta-\theta)}{\sin\beta}. \end{cases}$$

Conditions initiales. La théorie présentée ici vise seulement à étudier la modification apportée par la présence du bord d'attaque d'épaisseur finie, à l'écoulement relatif à l'obstacle idéalisé, non émoussé, écoulement que les techniques des chapitres I et II pourraient permettre de construire. En conséquence cette théorie n'est pas valable dans la région qui est dans le voisinage immédiat du nez émoussé; son domaine de validité est limité vers l'amont par la condition

$$(21)\qquad x_1 > x_1^{(0)},$$

comme il est expliqué sur la figure 6. En vertu du caractère hyperbolique des équations du mouvement, il est donc nécessaire d'imposer des conditions initiales sur la ligne $x_1 = x_1^{(0)}$. Autrement dit il faudrait se donner les valeurs de z, r, p, ρ, S, V, θ le long de la ligne $x_1 = x_1^{(0)}$. Il est clair que ces données ne peuvent être arbitraires, mais devraient résulter de la connaissance de l'écoulement dans la région du bord d'attaque. Il y a là une question délicate, non résolue, qui sera brièvement discutée dans le §2.8.

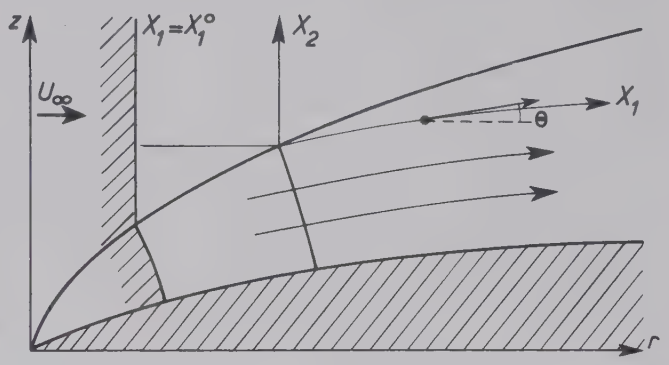


Fig. 6

III,2.2. *INTRODUCTION DE LA THÉORIE DES PETITES PERTURBATIONS.*

Quelque réflexion sur la nature du problème étudié permet de se rendre compte que la première question importante est le choix d'une longueur caractéristique. Lorsque le profil réel est supposé confondu avec le profil idéalisé de la figure 1 (cas où $a = 0$), il est clair que la longueur caractéristique à utiliser n'est autre que la corde du profil, d'où le choix de (1.7) pour la définition du profil idéalisé. D'un autre côté, lorsque l'on désire faire l'étude de l'écoulement dans la région du bord d'attaque, il est clair que c'est l'épaisseur de ce dernier qui doit jouer le rôle de longueur caractéristique. Par contre, dans le problème actuel, ni la corde du profil, ni l'épaisseur du bord d'attaque ne peuvent jouer convenablement ce rôle. En ce qui concerne la corde, cela est évident si l'influence de l'émoussement est suffisante pour que tout le profil idéalisé soit noyé dans la zone d'influence de l'émoussement. En ce qui concerne l'épaisseur du bord d'attaque cela est moins évident, mais cela deviendra parfaitement clair à la fin de ce chapitre. Toutefois, il est possible de faire la remarque suivante : avec les notations de la figure 7, si s/a est fixé alors que M_∞ est variable, il est

clair que p/p_∞ est une fonction croissante de M_∞, qui augmente même indéfiniment lorsque $M_\infty \to \infty$. Ainsi, pour conserver constante la valeur de p/p_∞ il y a lieu de faire croître indéfiniment s/a en même temps que M_∞, d'une manière qui est inconnue pour l'instant. En désignant par $k = M_\infty \tau$ le paramètre de similitude hypersonique du profil idéalisé, il est clair, d'après le chapitre I, que le niveau des pressions est $0(k^2)$ sur le profil idéalisé. Sur le profil réel, suivant l'importance de l'effet de bord d'attaque, et suivant la valeur de z/a, le niveau des pressions peut être très différent. Puisque la théorie exposée ici ne prétend pas sortir du cadre de la théorie des petites perturbations, mais prétend seulement adapter la théorie conventionnelle du chapitre I, il est clair que la première chose à faire est d'introduire un nouveau paramètre hypersonique k^*, tel que le niveau des pressions sur l'obstacle réel soit précisément $0(k^{*2})$. Le but de la présente théorie doit donc être de définir une fonction $A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F})$ caractérisant l'importance de l'effet d'émoussement, et possédant la propriété suivante : sur l'obstacle réel, à une distance $z = a A_\varepsilon$, le niveau des pressions est $0(k^{*2})$. Dans ces conditions, il est clair que la longueur caractéristique du problème doit être :

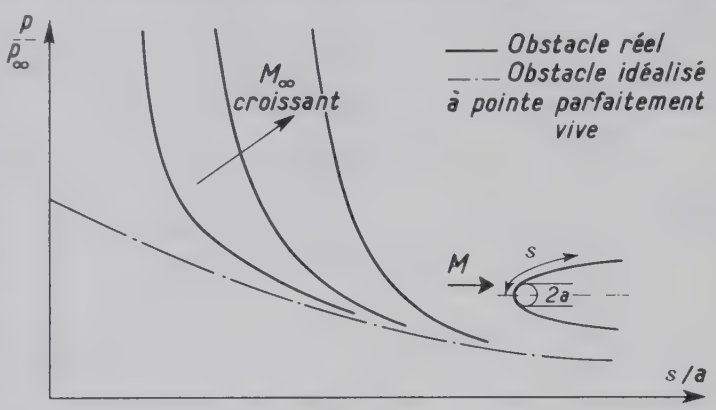


Fig. 7

$$L_\varepsilon = a A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}). \tag{22}$$

La discussion qui précède montre que le schéma de principe assurant la détermination de la fonction A_ε est le suivant. L'écoulement exact étant pour un moment, supposé connu, la fonction $g(z)$ de (16), qui donne la forme de l'onde de choc, dépend des mêmes variables que A_ε. Conformément au formalisme de la théorie des petites perturbations il faut poser

$$\begin{cases} z = L_\varepsilon \overline{z}, \\ g(z; M_\infty, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \dfrac{k^* L_\varepsilon}{M_\infty} \overline{g}(\overline{z}; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}). \end{cases} \tag{23}$$

Dans ces conditions, la fonction $\overline{g}$ doit vérifier la condition

$$0 < \lim_{M_\infty \to \infty} \frac{d\overline{g}}{d\overline{z}} < +\infty \tag{24}$$

la limite s'entendant à $\overline{z}$, k^*, p_∞, T_∞, γ_∞, $\overline{\gamma}$, $\mathcal{F}$ fixés.

III,2.2.1. *DÉFINITION D'UN PREMIER PASSAGE A LA LIMITE.* D'après (18), L_ε est une valeur caractéristique pour x_1, alors que, d'après (18) et (23), $(k^* L_\varepsilon / M_\infty)^{1+\varepsilon}$ est une valeur caractéristique pour x_2; cela conduit à poser

$$x_1 = L_\varepsilon \overline{x_1}, \qquad x_2 = \left(\frac{k^* L_\varepsilon}{M_\infty}\right)^{1+\varepsilon} \overline{x_2}. \tag{25}$$

Dans ces conditions, soit $F(x_1, x_2; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}, a)$ une grandeur caractéristique de l'écoulement, par exemple la pression, il est indiqué de poser

$$\begin{cases} F\left[L_\varepsilon \overline{x_1}, \left(\dfrac{k^* L_\varepsilon}{M_\infty}\right)^{1+\varepsilon} \overline{x_2}; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}, a\right] = \\ \varphi_F^{(1)}(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}, a) \overline{F}(\overline{x_1}, \overline{x_2}; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}) \end{cases} \tag{26}$$

la fonction φ_F étant telle que $\bar{F}$ tende vers une limite finie et non nulle F^* lorsque $M_\infty \to \infty$, toutes les autres variables étant fixées. Dans ces conditions le premier passage à la limite, ou passage à la limite externe est défini par :

$$\text{Lim}_1 = \lim_{M_\infty \to \infty} \left\{ k^*, \bar{x}_1, \bar{x}_2 ; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F} / \text{fixés} \right\}, \tag{27}$$

moyennant quoi la notation suivante est introduite (*)

$$\text{Lim}_1 F = F^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}). \tag{28}$$

III,2.2.2. *NOTION DE COUCHE EXTERNE.* Soit

$$g^*(\bar{x}_1, k^*) = \text{Lim}_1 \, g(x_1), \tag{29}$$

le résultat de l'application du passage à la limite externe à la fonction $g(z)$ donnant la forme de l'onde de choc. En vertu de (1.6) le passage à la limite (28) ne peut être uniformément valable au voisinage de $\bar{x}_2 = 0$; il en est de même au voisinage de $\bar{x}_1 = 0$ en vertu de (21).

La couche externe se laisse définir alors, comme le domaine du plan physique qui correspond au domaine ouvert suivant dans le plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

$$\bar{x}_1 > 0, \quad 0 < \bar{x}_2 \leqslant \frac{[g^*(\bar{x}_1, k^*)]^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \text{ (couche externe).} \tag{30}$$

Par application de (27) à p, ρ, V, θ, r, z, h_1, h_2, la notion de couche externe conduit tout naturellement à celle d'écoulement externe. Conformément au schéma (26), les divers changements de fonctions suivants sont introduits

$$\left\{ \begin{array}{ll} p = \gamma_\infty p_\infty k^{*2} \bar{p}, & r = \dfrac{L_\varepsilon k^*}{M_\infty} \bar{r}, \\ \rho = \rho_\infty \bar{\rho}, & z = L_\varepsilon \bar{z}, \\ V = U_\infty \bar{V}, & h_1 = \bar{h}_1, \\ \theta = \dfrac{k^*}{M_\infty} \bar{\theta}, & h_2 = \left(\dfrac{L_\varepsilon k^*}{M_\infty} \right)^{-\varepsilon} \bar{h}_2, \end{array} \right. \tag{31}$$

ce qui précise la fonction φ_F pour chacune des variables précédentes. Pour les 6 premières variables ce choix est dicté par la théorie des petites perturbations, pour les deux dernières ce choix est dicté par (20). Dans ces conditions l'application du passage à la limite externe à (31) conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lim}_1 p = p^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 \rho = \rho^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 V = V^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 \theta = \theta^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 r = r^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 z = z^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 h_1 = h^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \text{Lim}_1 h_2 = h_2^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \end{array} \right. \tag{32}$$

(*) Il s'agit d'un abus de langage car F^* est la limite de $\bar{F}$ et non de F, mais la notation est commode.

L'écoulement externe est alors obtenu en effectuant en sens inverse la transformation (26), ainsi :

$$
(33)\quad
\begin{cases}
p_{ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \gamma_\infty k^{*2} p_\infty p^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
\rho_{ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \rho_\infty \rho^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
V_{ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = U_\infty V^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
\theta_{ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \dfrac{k^*}{M_\infty}\theta^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
r_{ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \dfrac{aA_\varepsilon k^*}{M_\infty} r^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
z_{ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = aA_\varepsilon z^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
h_{1\,ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = h_1^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right), \\
h_{2\,ext}(x_1, x_2; k^*, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \dfrac{M_\infty^\varepsilon}{a^\varepsilon A_\varepsilon^\varepsilon k^{*\varepsilon}} h_2^*\left(\dfrac{x_1}{aA_\varepsilon}, \dfrac{x_2 M_\infty^{1+\varepsilon}}{a^{1+\varepsilon} k^{*\,1+\varepsilon} A_\varepsilon^{1+\varepsilon}}; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}\right),
\end{cases}
$$

III,2.3. *ÉTUDE DE LA COUCHE EXTERNE.*

III,2.3.1. *ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA COUCHE EXTERNE.*

Equations géométriques -

$$
(34)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial r^*}{\partial \bar{x}_1} = h_1^* \theta^*, & \dfrac{\partial z^*}{\partial \bar{x}_1} = h_1^*, \\
\dfrac{\partial r^*}{\partial \bar{x}_2} = h_2^*, & \dfrac{\partial z^*}{\partial \bar{x}_2} = 0,
\end{cases}
$$

$$
(35)\quad \frac{\partial h_1^*}{\partial \bar{x}_2} = 0, \qquad \frac{\partial h_2^*}{\partial \bar{x}_1} = h_1^* \frac{\partial \theta^*}{\partial \bar{x}_2}.
$$

Le lecteur pourra obtenir ces équations en substituant (31) dans (5) (6) et en effectuant (27). Ce procédé appliqué à l'équation (7) donne un résultat trivial, à moins que des approximations d'ordre supérieur ne soient considérées.

Equations mécaniques - En opérant de manière analogue avec les équations (13) il vient

$$
(36)\quad
\begin{cases}
V^* = 1, \\
\rho^* h_2^* r^{*\varepsilon} = 1, \\
\dfrac{\partial p^*}{\partial x_2} + \dfrac{1}{h_1^* r^{*\varepsilon}} \dfrac{\partial \theta^*}{\partial \bar{x}_1} = 0, & \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\left[p^* (\rho^*)^{-\bar{\gamma}}\right] = 0.
\end{cases}
$$

III,2.3.2. *CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA COUCHE EXTERNE.*

III,2.3.2.*a) CONDITIONS SUR L'ONDE DE CHOC.* Le passage à la limite (27) effectué sur la fonction β, définie par (17), conduit, après avoir posé $\beta = \frac{k^*}{M_\infty}\,\bar{\beta}$, à une fonction $\beta^*(\bar{x}_1, k^*)$ vérifiant, d'après (27) et (29),

$$\beta^*(\bar{x}_1, k^*) = \frac{dg^*(\bar{x}_1, k^*)}{d\bar{x}_1}. \tag{37}$$

Il est clair que l'image de l'onde de choc dans le plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est $\bar{x}_2 = (1+\varepsilon)^{-1}[g^*(\bar{x}_1, k^*)]^{1+\varepsilon}$; dans ces conditions, $F^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2 ; k^*)$ désignant, selon (28), le résultat obtenu en effectuant (27) sur une grandeur F caractéristique de l'écoulement, la notation suivante est introduite

$$F^*_\sigma(\bar{x}_1, k^*) = F^*\left(\bar{x}_1, \frac{[g^*(\bar{x}_1, k^*)]^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}; k^*\right). \tag{38}$$

Il est clair que F^*_σ est une fonction de β^*. Les relations de RANKINE-HUGONIOT permettent de déterminer p^*_σ, ρ^*_σ, V^*_σ, θ^*_σ, r^*_σ, z^*_σ, $h^*_{1\sigma}$, $h^*_{2\sigma}$. En ce qui concerne p^*_σ et ρ^*_σ, cette détermination est assurée par le système suivant :

$$\begin{cases} p^*_\sigma(\beta^*, k^*) + \dfrac{\beta^{*2}}{\rho^*_\sigma(\beta^*, k^*)} = \beta^{*2} + \dfrac{1}{\gamma_\infty k^{*2}}, \\ \dfrac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\dfrac{p^*_\sigma}{\rho^*_\sigma} + \dfrac{\beta^{*}{}_2}{2\rho^{*2}_\sigma} = \dfrac{1}{(\gamma_\infty - 1)k^{*2}} + \dfrac{\beta^{*2}}{2}, \end{cases} \tag{39}$$

qui est obtenu par substitution de (31) dans (19) et application de (27). Pour les autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement l'on a, de la même manière à partir de (20) :

$$\begin{cases} \theta^*_\sigma(\beta^*, k^*) = \beta^*\left(1 - \dfrac{1}{\rho^*_\sigma}\right), \\ V^*_\sigma(\beta^*, k^*) = 1, \\ r^*_\sigma(\bar{x}_1; k^*) = g^*(\bar{x}_1; k^*), \\ z^*_\sigma(\bar{x}_1; k^*) = \bar{x}_1, \\ h^*_{1\sigma}(\bar{x}_1; k^*) = 1, \\ h^*_{2\sigma}(\bar{x}_1; k^*) = \dfrac{1}{\rho^* g^{*\varepsilon}}. \end{cases} \tag{40}$$

La forme même des relations (39) suggère, lorsque le paramètre k^* relatif à l'obstacle réel est très supérieur à l'unité, un développement asymptotique procédant selon les puissances croissantes de $1/k^{*2}$, sous la forme

$$\begin{cases} p^*_\sigma(\beta^*, k^*) = p^*_{\sigma_0}(\beta^*) + \dfrac{1}{k^{*2}} p^*_{\sigma_1}(\beta^*) + \cdots, \\ \rho^*_\sigma(\beta^*, k^*) = \rho^*_{\sigma_0}(\beta^*) + \dfrac{1}{k^{*2}} \rho^*_{\sigma_1}(\beta^*) + \cdots, \\ \theta^*_\sigma(\beta^*, k^*) = \theta^*_{\sigma_0}(\beta^*) + \dfrac{1}{k^{*2}} \theta^*_{\sigma_1}(\beta^*) + \cdots. \end{cases} \tag{41}$$

L'on trouve, par substitution de (41) dans (39-40)

$$\begin{cases} p^*_{\sigma_0}(\beta^*) = \dfrac{2}{\bar{\gamma}+1}\beta^{*2}, \\ \rho^*_{\sigma_0}(\beta^*) = \dfrac{\bar{\gamma}+1}{\bar{\gamma}-1}, \\ \theta^*_{\sigma_0}(\beta^*) = \dfrac{2}{\bar{\gamma}+1}\beta^*, \end{cases} \tag{42}$$

et ainsi de suite .

III,2.3.2.*b) CONDITIONS AUX LIMITES A LA FRONTIÈRE INTÉRIEURE DE LA COUCHE EXTERNE.* D'après (30), le voisinage de $\bar{x}_2 = 0$ ne fait pas partie de la couche externe, pourtant, les quelques solutions connues des équations de la théorie des petites perturbations conduisent à penser que, sauf en ce qui concerne ρ^* et h_2^*, les diverses fonctions (32) tendent vers des limites finies et non nulles lorsque $\bar{x}_2 \to 0$; les fonctions ρ^* et h_2^* elles-mêmes tendent respectivement vers zéro et vers l'infini lorsque $\bar{x}_2 \to 0$, mais elles sont encore utilisables dans un certain voisinage de $\bar{x}_2 = 0$, lequel constitue la couche externe étendue qui a été définie dans l'introduction. Le fait que ρ^* tende vers zéro peut se voir de la manière suivante. Dans (37), β^* est exprimé en fonction de $\bar{x}_1$; en remplaçant x_1 par sa valeur en fonction de $\bar{x}_2$, tirée de $\bar{x}_2(1+\varepsilon) = [g^*(\bar{x}_1, k^*)]^{1+\varepsilon}$, il en résulte une expression du type

$$\beta^* = \beta^*_{\mathfrak{L}^e}(\bar{x}_2; k^*), \qquad \bar{x}_2 = \Xi^*(\beta^*_{\mathfrak{L}^e}; k^*), \tag{43}$$

et il est clair que

$$\lim_{\bar{x}_2 \to 0} \beta^*(\bar{x}_2, k^*) = \infty . \tag{44}$$

Maintenant, d'après (36. *d*) - (1.18) - (1.24) - (1.26), l'on a

$$\rho^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, k^*) = (\gamma_\infty k^{*2})^{\frac{1}{\gamma}} \left[p^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left\{ \Gamma\left[k^* \beta^*(\bar{x}_2, k^*)\right] \right\}^{-1} \tag{45}$$

et le fait que $\rho^* \to 0$ lorsque $\bar{x}_2 \to 0$ résulte de 44 et de la nature de la fonction Γ (voir 1.34) d'après laquelle $\Gamma(u) \to \infty$ lorsque $u \to \infty$. Le fait que $h_2^* \to \infty$ résulte alors de (36. *b*).

Puisque p^*, θ^* et r^* tendent vers des limites finies lorsque $\bar{x}_2 \to 0$, il est possible de poser

$$\begin{cases} \lim\limits_{\bar{x}_2 \to 0} p^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), = \widetilde{p}\,(\bar{x}_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \lim\limits_{\bar{x}_2 \to 0} \theta^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), = \widetilde{\theta}\,(\bar{x}_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \lim\limits_{\bar{x}_2 \to 0} r^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), = \widetilde{r}\,(\bar{x}_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}); \end{cases} \tag{46}$$

en ce qui concerne ρ^* et h_2^* la question vient d'être examinée, il est seulement possible de dire que

$$\lim_{x_2 \to 0} \rho^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*) h_2^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*) = [\widetilde{r}(\bar{x}_1; k^*)]^{-\varepsilon}. \tag{47}$$

Enfin, en ce qui concerne V^*, h_1^* et z^* la question est triviale car d'après (34) - (35) - (36) - (40) l'on a

$$\begin{cases} V^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*) = 1, \\ h_1^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*) = 1, \\ z^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k^*) = \bar{x}_1. \end{cases} \tag{48}$$

En théorie hypersonique des petites perturbations, sous la forme considérée au chapitre I, $\widetilde{\theta}(\bar{x}_1, k^*)$ et $\widetilde{z}(\bar{x}_1, k^*)$ sont des fonctions connues de $\bar{x}_1$, puisque $\widetilde{z}(\bar{x}_1, k^*)$ est l'équation du profil et que

$$\widetilde{\theta}(\bar{x}_1, k^*) = \frac{d}{d\bar{x}_1}[\widetilde{z}(\bar{x}_1, k^*)]. \tag{49}$$

Dans le problème actuel il n'en est rien et les fonctions précédentes (46) sont des inconnues du problème. Cela résulte de la non uniformité du passage à la limite (27) sur l'obstacle lui-même, en $\bar{x}_2 = 0$, non uniformité qui résulte de (1.6). La non uniformité en question se traduit comme on le verra effectivement par

$$\begin{cases} \lim\limits_{\bar{x}_2 \to 0} \mathrm{Lim}_1\, r \neq \mathrm{Lim}_1 \lim\limits_{x_2 \to 0} r, \\ \lim\limits_{\bar{x}_2 \to 0} \mathrm{Lim}_1\, \theta \neq \mathrm{Lim}_1 \lim\limits_{x_2 \to 0} \theta, \end{cases} \tag{50}$$

et seuls les seconds membres sont déterminés par la donnée de l'obstacle sous la forme (1.7), de sorte que la condition à la limite relative à l'obstacle fait ici défaut; elle ne peut être

donnée que par l'étude de la couche interne et par celle du raccord entre les deux couches. D'ores et déjà il est possible de prévoir, d'après (1.31), qu'elle se présentera comme une relation entre les fonctions $\tilde{p}(\bar{x}_1, k^*)$ et $\tilde{r}(\bar{x}_1, k^*)$; en anticipant sur le résultat, cette relation se présente sous la forme :

$$(51) \qquad \left\{[\tilde{r}(\bar{x}_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})]^{1+\varepsilon} - [f^*(\bar{x}_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})]^{1+\varepsilon}\right\} \cdot \left\{\tilde{p}(\bar{x}_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})\right\}^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} = C^{te}.$$

III,2.3.2.*c) CONDITIONS INITIALES*. Enfin, des conditions initiales devraient être imposées en $\bar{x}_1 = 0$, mais la détermination de ces conditions nécessiterait la connaissance de l'écoulement dans la région du bord d'attaque. Quoi qu'il en soit de cette dernière question, ce que l'on sait sur les équations de la théorie des petites perturbations permet de penser que les équations (34) - (35) - (36) - les conditions aux limites sur l'onde de choc (37) - (39) - (40), la condition (51) à la frontière intérieure de la couche externe et enfin des conditions initiales convenables constituent un problème bien posé. Mais c'est à peu près tout ce qui peut être dit pour l'instant, le matériel de solutions connues pour les équations de la théorie des petites perturbations étant beaucoup trop restreint.

III,2.3.3. *RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS DE LA THÉORIE DES PETITES PERTURBATIONS.*

Les équations (34) (35) (36) ne se présentent pas sous la forme habituelle des équations de la théorie hypersonique des petites perturbations, mais le passage à cette forme est immédiat; il suffit de remarquer que (34) et (48) entraînent

$$(52) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial}{\partial z^*} + \theta^* \frac{\partial}{\partial r^*}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} = h_2^* \frac{\partial}{\partial r^*},$$

pour obtenir

$$(53) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta^*}{\partial z^*} + \theta^* \dfrac{\partial \theta^*}{\partial r^*} + \dfrac{1}{\rho^*} \dfrac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial z^*}(\rho^* r^{*\varepsilon}) + \dfrac{\partial}{\partial r^*}(\rho^* r^{*\varepsilon} \theta^*) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z^*} + \theta^* \dfrac{\partial}{\partial r^*}\right)(p^*(\rho^*)^{-\bar{\gamma}}) = 0. \end{cases}$$

Le lecteur pourra identifier ces équations avec les équations (1.54) ou (1.55) du chapitre I grâce à un changement de notations évident, et après passage aux coordonnées cylindriques dans le cas d'un écoulement de révolution.

III,2.4. *DÉFINITION D'UN SECOND PASSAGE A LA LIMITE. NOTION DE COUCHE INTERNE.*

L'obstacle, caractérisé par $x_2 = \bar{x}_2 = 0$, n'étant pas dans le domaine de validité de l'écoulement externe, il est nécessaire de faire une étude spéciale du voisinage de $\bar{x}_2 = 0$. Ainsi apparait la nécessité de séparer les lignes de courant en deux classes formant respectivement la couche interne et la couche externe comme il a été expliqué dans l'introduction. Il est clair d'abord que la condition (24) n'est pas différente de la condition (1.12), d'où résulte que la notion de couche externe telle qu'elle a été définie au § 2.2.2 coïncide avec celle qui a été introduite au paragraphe 1. De la même manière la couche interne, ou voisinage de $\bar{x}_2 = 0$, est formée par les lignes de courant qui, dans l'écoulement incident, étaient à une distance de l'axe de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du bord d'attaque; ces lignes de courant vérifient par suite la condition (1.14). De même que la notion de couche externe est associée à un premier passage à la limite, de même la notion de couche interne est associée à un second passage à la limite, mais d'une manière moins évidente. La première idée qui se présente à l'esprit est

de poser

$$\overline{x_1} = x_1^+, \qquad \overline{x_2} = \left(\frac{M_\infty}{k^* A(M_\infty, k^*)}\right)^{1+\varepsilon} x_2^+, \tag{54}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}(x_1^+, \left(\dfrac{M_\infty}{k^* A_\varepsilon}\right)^{1+\varepsilon} x_2^+; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) = \varphi_F^{(2)}(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) \\ \qquad\qquad F^+(x_1^+, x_2^+; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \overline{\gamma}; \mathcal{F}). \end{array} \right. \tag{55}$$

en essayant d'opérer comme en (26 - 27 - 28). Mais il est possible de se convaincre de la manière suivante que cela n'est pas correct. Soit $\beta_{\mathcal{L}}(x_2, M_\infty; T_\infty, p_\infty; \mathcal{F})$ l'inclinaison de l'onde de choc au point où elle est rencontrée par la ligne de courant $x_2 = \text{Cte}$, l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x_1, x_2; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = \rho_\infty \left(\dfrac{p(x_1, x_2; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a)}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \cdot \\ \qquad \cdot \Gamma^{-1}(M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}}[x_2; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a]; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}) \end{array} \right. \tag{56}$$

et il est clair que, en raison du terme exponentiel figurant dans Γ, comme il est indiqué en (1.35), aucun passage à la limite basé sur (54-55) n'est valable pour ρ. Il en est de même de h_2 puisque, d'après (13.a)

$$h_2 = \frac{U_\infty}{V} r^{-\varepsilon} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{-\frac{1}{\bar{\gamma}}} \Gamma. \tag{57}$$

Mais l'on constate que, dans les équations géométriques (5) (6), c'est la dérivée $\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ et non $\frac{\partial}{\partial x_2}$ qui intervient; d'après (57) il est donc indiqué d'introduire, à la place de (54) le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \overline{x_1}, \\ \alpha_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) a^{1+\varepsilon} \zeta_2 = \\ = \displaystyle\int_0^{x_2} \Gamma(M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}}[t, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a], p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}) dt, \end{array} \right. \tag{58}$$

la fonction $\alpha_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})$ étant celle qui a été introduite en (1.30). A la place de (55) il faut poser

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}(\overline{x_1}, \overline{x_2}; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) = \varphi_F^{(3)}(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) \cdot \\ \cdot F^\square(\zeta_1, \zeta_2; M_\infty, k^*, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}), \end{array} \right. \tag{59}$$

la fonction $\varphi_F^{(3)}$ étant choisie de manière que $F^\square$ tende vers une limite finie et non nulle lorsque $M_\infty \to \infty$, toutes les autres variables étant fixées. Le passage à la limite interne est alors défini par

$$\operatorname*{Lim}_2 = \lim_{M_\infty \to \infty} \left\{ \zeta_1, \zeta_2, k^*, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}, \mathcal{F}/\text{fixés} \right\} \tag{60}$$

moyennant quoi la notation suivante est introduite

$$\operatorname*{Lim}_2 F = \hat{F}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}). \tag{61}$$

Que telle est la manière correcte de procéder, cela est suggéré par l'équation (1.29) de l'introduction. Dans ce qui suit, l'on va s'attacher à effectuer en détail (59) - (60) - (61) pour les diverses grandeurs de l'écoulement. Le résultat sera, par analogie avec (32), de la forme

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname*{Lim}_2 p = \hat{p}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \operatorname*{Lim}_2 V = \hat{V}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \end{array} \right.$$

$$
(62)\qquad
\left|
\begin{aligned}
&\lim_{2}\theta = \hat{\theta}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&\lim_{2} r = \hat{r}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&\lim_{2} z = \hat{z}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&\lim_{2} h_1 = \hat{h}_1(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),
\end{aligned}
\right.
$$

Les fonctions ρ et h_2 échappent à ce procédé, mais cela est sans importance, tout en étant au fond bien naturel. En anticipant sur le résultat, ou en se reportant à (1.28), il est possible d'annoncer que la représentation (62) est indépendante dans une certaine mesure de la nature détaillée de l'écoulement dans la région du bord d'attaque. C'est pourquoi la dépendance des fonctions (62) par rapport à p_∞, T_∞, F n'a pas été mentionnée. Ainsi est obtenu ce résultat remarquable que le détail de l'écoulement dans la région du bord d'attaque intervient seulement pour fixer les fonctions d'échelle α_ε et $\varphi_F^{(3)}$; par contre il est clair, d'après (56 - 57) que le détail de l'écoulement dans la région du bord d'attaque, ou plus exactement la forme de l'onde de choc, est déterminante en ce qui concerne ρ et h_2. Il est donc bien naturel que ces deux fonctions échappent à la représentation (62).

Finalement, d'une manière tout à fait analogue à (33), l'écoulement interne peut être défini par les formules suivantes :

$$
(63)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&x_1 = a\,A_\varepsilon(M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})\,\zeta_1,\\
&\alpha_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})\, a^{1+\varepsilon}\,\zeta_2 = \int_0^{x_2} \Gamma\,(M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}}[t, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a];\\
&\qquad\qquad p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma})\,dt,\\
&p_{\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = \gamma_\infty k^{*2} p_\infty \hat{p}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&\rho_{\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = \rho_\infty\big[\gamma_\infty k^{*2}\hat{p}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma})\big]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}\\
&\qquad\qquad \Gamma^{-1}(M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}}[x_2, M_\infty;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a];\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&V_{\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = U_\infty \hat{V}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&\theta_{\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = \frac{k^*}{M_\infty}\,\hat{\theta}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&r_{\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = a\,\frac{k^*}{M_\infty}\,A_\varepsilon(M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \bar{\gamma}_\infty, \gamma;\, \mathcal{F})\\
&\qquad\qquad \hat{r}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&z_{\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = a\,A_\varepsilon(M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F})\\
&\qquad\qquad \hat{z}\,(\zeta_1, \zeta_2;\, k^*;\, \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&h_{1\,\text{int}}\,(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F},\, a) = \hat{h}_1(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}),\\
&h_{2\text{int}}(x_1, x_2;\, M_\infty, k^*;\, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma};\, \mathcal{F};\, a) = \left(\frac{M_\infty}{ak^* A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma})}\right)^{\varepsilon}\\
&\qquad\qquad \hat{V}^{-1}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})\,\hat{r}^{-\varepsilon}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}).\\
&\qquad \cdot\,[\gamma_\infty k^{*2}\,\hat{p}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})]^{-\frac{1}{\bar{\gamma}}}\,\Gamma\,(M_\infty \sin \beta_{\mathcal{L}}[x_2, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a], p_\infty, T_\infty).
\end{aligned}
\right.
$$

III,2.5. *ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT INTERNE.*

III,2.5.1. *ÉTUDE DE LA PRESSION.* Après avoir effectué le changement de fonctions

$$(64)\qquad \begin{cases} p = \gamma_\infty k^{*2} p_\infty p^\square, \\ V = U_\infty V^\square, \\ h_1 = h_1^\square, \\ z = a A_\varepsilon z^\square, \\ r = a A_\varepsilon \dfrac{k^*}{M_\infty} r^\square, \\ \theta = \dfrac{k^*}{M_\infty} \theta^\square, \end{cases}$$

dans l'équation (2.13 *b*), il vient, compte tenu de (58),

$$(65)\qquad \frac{\partial p^\square}{\partial \zeta_2} = -\alpha_\varepsilon \left(\frac{M_\infty}{k^* A_\varepsilon}\right)^{1+\varepsilon} \frac{V^\square}{\Gamma r^{\square\varepsilon} h_1^\square} \frac{\partial \theta^\square}{\partial \zeta_1}.$$

Mais, il sera établi, au cours du § 2.54 qu'il est nécessaire de lier $\alpha_\varepsilon(M_\infty)$ et $A_\varepsilon(M_\infty, k^*)$ par la relation

$$(66)\qquad \alpha_\varepsilon \cdot \left(\frac{M_\infty}{k^*}\right)^{1+\varepsilon} = A_\varepsilon^{1+\varepsilon} k^{*2/\overline{\gamma}};$$

il en résulte l'équation suivante donnant la variation de $p^\square$ en fonction de G_2 :

$$(67)\qquad \frac{\partial p^\square}{\partial G_2} = -\frac{k^{*2/\overline{\gamma}}}{\Gamma} \frac{V^\square}{h_1^\square r^{\square\varepsilon}} \frac{\partial \theta^\square}{\partial G_1};$$

Or il est clair, d'après (1.34), que

$$(68)\qquad \lim_2 \frac{k^{*2/\overline{\gamma}}}{\Gamma} = 0,$$

de sorte que la fonction $\hat{p}$ vérifie l'équation

$$(69)\qquad \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta_2} = 0.$$

Autrement dit, le résultat très simple suivant est obtenu : la pression dans la couche interne ne dépend que de ζ_1. Nous verrons ultérieurement (formules 102) comment la condition de raccord avec la couche externe assure que

$$(70)\qquad \hat{p}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \overline{\gamma}) = \tilde{p}(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \overline{\gamma}),$$

la fonction $\tilde{p}$ étant définie par (46).

III,2.5.2. *ÉTUDE DE LA VITESSE.* Après avoir introduit le paramètre thermodynamique

$$(71)\qquad \chi = \frac{2h}{p/\rho} - 1,$$

en vertu de la constance de l'entropie derrière l'onde de choc de tête l'on a

$$(72)\qquad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{2}{\chi+1}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_1}.$$

Alors, si μ désigne une valeur moyenne de $\dfrac{2}{\chi+1}$, valeur qui peut varier avec le point (x_1, x_2), et si $p_0(x_2)$ désigne la pression génératrice sur la ligne de courant $x_2 = \text{Cte}$, il vient par intégration de (72), et après substitution dans l'équation de l'énergie

$$(73)\qquad V^{\square 2} = \left(1 + \frac{2}{\gamma_\infty - 1}\frac{1}{M_\infty^2}\right)\left[1 - \left(\frac{p(x_1, x_2)}{p_0(x_2)}\right)^\mu\right].$$

Mais, $B(M_\infty, p_\infty, T_\infty)$ désignant une fonction qui tend vers une limite finie lorsque $M_\infty \to \infty$, l'on a

$$(74)\qquad \begin{cases} p_0(0) = \rho_\infty U_\infty^2 B(M_\infty, p_\infty, T_\infty), \\ p_0(x_2) \geqslant p_0(0), \end{cases}$$

et par suite

$$(75)\qquad 1 - \left(\frac{k^{*2} p^\square}{M_\infty^2 B(M_\infty, p_\infty, T_\infty)}\right)^\mu \leqslant \frac{V^{\square 2}}{1 + \dfrac{2}{\gamma_\infty - 1}\dfrac{1}{M_\infty^2}} \leqslant 1,$$

d'où résulte, μ étant positif,

$$(76)\qquad \hat{V}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = 1.$$

Ainsi, uniformément aussi bien dans la couche externe que dans la couche interne, la vitesse tend vers la valeur qu'elle a dans l'écoulement incident.

III,2.5.3. *ÉTUDE DES FONCTIONS* h_1 *ET* z. Après avoir posé

$$(77)\qquad \begin{cases} z(x_1, x_2; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = a \cdot \\ \cdot A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) z^\square(\zeta_1, \zeta_2; T_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) \\ h_1(x_1, x_2; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}, a) = h_1^\square(\zeta_1, \zeta_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) \end{cases}$$

et après avoir substitué (64) et (77) dans les équations (5) et (6), en tenant compte de (58) et (66), il vient

$$(78)\qquad \begin{cases} V^\square r^{\square\varepsilon} (\gamma_\infty k^{*2} p^\square)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \dfrac{\partial h_1^\square}{\partial \zeta_2} = -\dfrac{k^{*2}}{M_\infty^2} \dfrac{\partial \theta^\square}{\partial \zeta_1}, \quad \dfrac{\partial z^\square}{\partial \zeta_1} = h_1^\square \cos\left(\dfrac{k^*}{M_\infty} \theta^\square\right), \\ V^\square r^{\square\varepsilon} (\gamma_\infty k^{*2} p^\square)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \dfrac{\partial z^\square}{\partial \zeta_2} = -\dfrac{k^*}{M_\infty} \sin\left(\dfrac{k^*}{M_\infty} \theta^\square\right). \end{cases}$$

Par le passage à la limite (60) les équations suivantes sont donc obtenues

$$(79)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{h}_1}{\partial \zeta_2} = \dfrac{\partial \hat{z}}{\partial \zeta_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \hat{z}}{\partial \zeta_1} = \hat{h}_1. \end{cases}$$

Il sera établi ultérieurement - formules (102) - que la condition de raccord avec la couche externe entraîne dans ces conditions :

$$(80)\qquad \begin{cases} \hat{h}_1 = 1, \\ \hat{z} = 1. \end{cases}$$

III,2.5.4. *ÉTUDE DES FONCTIONS* r *ET* θ. La substitution de (64) et (77) dans les équations (5) relatives à r donne

$$(81)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r^\square}{\partial \zeta_1} = \dfrac{M_\infty}{k^*} h_1^\square \sin\left(\dfrac{k^*}{M_\infty} \theta^\square\right), & a) \\ \dfrac{1}{\alpha_\varepsilon} \left(\dfrac{A_\varepsilon k^*}{M_\infty}\right)^{1+\varepsilon} (\gamma_\infty k^{*2} p^\square)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} V^\square r^{\square\varepsilon} \dfrac{\partial r^\square}{\partial \zeta_2} = \cos\left(\dfrac{k^*}{M_\infty} \theta^\square\right). & b) \end{cases}$$

L'équation (81 *b*) joue un rôle essentiel car c'est elle qui assure la détermination de la fonction d'échelle $A_\varepsilon(M_\infty, k^*)$. En effet, la fonction $\alpha_\varepsilon(M_\infty)$, sur la définition de laquelle il y aura lieu de revenir, est fixée dès que la géométrie de l'écoulement dans la région du bord d'attaque est connue, car elle est donnée par la formule (1.31); par contre la fonction $A_\varepsilon(M_\infty, k^*)$, qui fixe à quelle distance l'on se place du bord d'attaque, est à notre disposition, ce qui permet de la choisir de manière que l'équation (81 *b*) donne un résultat non trivial. L'application de ce procédé fournit la condition :

$$0 < \lim_{M_\infty \to \infty} \frac{k^{*2/\bar{\gamma}}}{\alpha_\varepsilon(M_\infty)} \left(\frac{k^* A_\varepsilon(M_\infty, k^*)}{M_\infty} \right)^{1+\varepsilon} < +\infty ; \tag{82}$$

laquelle est manifestement vérifiée si la fonction A_ε est définie par (66). Dans ces conditions, compte tenu de (70) (76) et (80), les équations (81) deviennent par le passage à la limite interne (61) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \zeta_1} = \hat{\theta}, \\ [\gamma_\infty \tilde{p}(\zeta_1, k^*)]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \rho \varepsilon \dfrac{\partial r}{\partial \zeta_2} = 1. \end{cases} \tag{83}$$

Il est possible de se convaincre, grâce à un calcul qui ne sera pas reproduit ici, que l'équation (6 b) donne après passage à la limite une équation qui exprime que les valeurs de $\dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \zeta_1}$ et $\dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \zeta_2}$ tirées de (83) vérifient

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \zeta_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \zeta_2}\left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \zeta_1}\right). \tag{84}$$

Il est maintenant possible d'examiner la question des conditions aux limites sur l'obstacle, exprimées en (14 - 15). Il est clair que ces conditions aux limites sont

$$\begin{cases} \operatorname{Lim}_2 Z = \hat{z}(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \operatorname{Lim}_2 R = \hat{r}(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \operatorname{Lim}_2 \Theta = \hat{\theta}(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}), \\ \operatorname{Lim}_2 H_1 = \hat{h}_1(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}). \end{cases} \tag{85}$$

L'application de (85) nécessite quelque discussion supplémentaire, en effet dans les deux membres de ces relations il y a des longueurs caractéristiques différentes. A gauche c'est la corde c de l'obstacle ($c = 1$) qui joue le rôle de longueur caractéristique, alors que à droite c'est L_ε qui joue ce rôle. Il faut maintenant relier ces deux longueurs caractéristiques. Le moyen le plus simple d'y parvenir est de cesser de faire jouer au rapport a/c le rôle de paramètre primitif et de faire au contraire jouer ce rôle au rapport des deux longueurs caractéristiques

$$\lambda = \frac{a A_\varepsilon(M_\infty, k)}{c}. \tag{86}$$

De cette manière les paramètres primitifs de l'écoulement deviennent : pour l'écoulement incident M_∞, p_∞, Ta, pour l'obstacle idéalisé la fonction $f(z)$ de (1.7), et enfin pour l'obstacle réel, d'une part λ qui fixe l'épaisseur du bord d'attaque, d'autre part la variable symbolique $\mathcal{F}$ qui fixe sa forme géométrique. C'est de propos délibéré que dans (86) la variable k a été substituée à k^*; en effet, l'épaisseur du bord d'attaque étant déterminée par (86), le niveau des pressions sur l'obstacle idéalisé est le même que sur l'obstacle réel pourvu que λ soit égal à l'unité. Maintenant, les deux longueurs caractéristiques figurant dans les relations (85) sont respectivement $L_\varepsilon(M_\infty, k^*)$ et $\dfrac{1}{\lambda} L_\varepsilon(M_\infty, k)$. Or, la fonction α_ε, qui est sans dimensions,

ne fait intervenir aucune des longueurs caractéristiques précédentes, de la relation (66) résulte alors

$$\frac{L_\varepsilon(M_\infty, k^*)}{L_\varepsilon(M_\infty, k)} = \left(\frac{k}{k^*}\right)^{1+\frac{2}{\gamma(1+\varepsilon)}} = \left(\frac{k}{k^*}\right)^m . \tag{87}$$

A l'aide de (86) et (87) il est possible, en utilisant (14) (15) et (64), d'expliciter (85); cela conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{r}(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^{1-m} f\left(\lambda\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right) & a) \\ \hat{\theta}(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \dfrac{k}{k^*} f'\left[\lambda\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right], & b) \\ \hat{z}(\zeta_1, 0; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \zeta_1, & c) \\ \hat{h}_1(\zeta_1, 0; k^*, \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = 1. & d) \end{cases} \tag{88}$$

III,2.5.5. *RÉCAPITULATION. DESCRIPTION DE LA COUCHE INTERNE.* Moyennant les conditions (88 *a* - *b*), les équations (83) donnent $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$. Finalement, en rassemblant les divers résultats, les fonctions introduites en (63) sont données par :

$$\begin{cases} \hat{p}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \tilde{p}(G_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) & a) \\ \hat{V}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = 1 & b) \\ \hat{\theta}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \dfrac{\left[\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^{1-m} f\left(\lambda\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right)\right]^\varepsilon (1+\varepsilon)^{-1} \dfrac{k}{k^*} f'\left(\lambda\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right) + \zeta_2 \dfrac{d}{d\zeta_1}\left[\left\{\gamma_\infty \tilde{p}(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})\right\}^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}\right]}{\left\{\left[\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^{1-m} f\left(\lambda\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right)\right]^{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)\,\zeta_2\left[\gamma_\infty \tilde{p}(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})\right]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}} & c) \\ \hat{r}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \left\{\left[\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^{1-m} f\left(\lambda\left(\dfrac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right)\right]^\varepsilon + (1+\varepsilon)\,\zeta_2\left[\gamma_\infty \tilde{p}(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma})\right]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}\right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} & d) \\ \hat{z}(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = \zeta_1 & e) \\ \hat{h}_1(\zeta_1, \zeta_2; k^*; \gamma_\infty, \bar{\gamma}) = 1 & f) \\ m = 1 + \dfrac{2}{\bar{\gamma}(1+\varepsilon)} \end{cases} \tag{89}$$

L'écoulement interne est ensuite complètement défini par (64).

III,2.6. *ÉTUDE DU RACCORD ENTRE LES DEUX COUCHES.*

La question du raccord entre les deux couches a été abordée dans l'introduction : le principe de la méthode consiste à montrer que l'écoulement externe peut être défini dans une couche

externe étendue, et que l'écoulement interne peut être défini dans une couche interne étendue; les deux couches étendues ayant en commun une couche dite intermédiaire; l'on écrit alors que les deux écoulements coïncident dans cette couche intermédiaire.

Soit*

(90) $$r = ag(\beta; M_\infty, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})$$

l'équation de l'onde de choc, exprimée en prenant l'angle d'inclinaison β comme variable indépendante, d'après (3) la formule (58 b) peut être écrite sous la forme

(91) $$\alpha_\varepsilon \zeta_2 = \int_\beta^{\pi/2} \Gamma(M_\infty \sin\omega) \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{[g(\omega)]^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right) d\omega .$$

Dans la couche externe, β est de l'ordre de k^*/M_∞, dans la couche interne β est de l'ordre de l'unité; dans la couche externe étendue β est de l'ordre de $\delta_1(M_\infty)$ ou d'un ordre supérieur, dans la couche interne étendue, β est de l'ordre de $\delta_2(M_\infty)$ ou d'un ordre inférieur, ou même de l'ordre de l'unité. Les fonctions δ_1 et δ_2 sont telles que, d'une part δ_1 est d'ordre inférieur à k^*/M_∞, autrement dit $M_\infty \delta_1(M_\infty) \to \infty$ lorsque $M_\infty \to \infty$, d'autre part δ_2 est d'ordre supérieur à l'unité, autrement dit $\delta_2(M_\infty) \to 0$ lorsque $M_\infty \to \infty$, enfin δ_1 est d'ordre inférieur à δ_2, autrement dit $\delta_1/\delta_2 \to \infty$ lorsque $M_\infty \to \infty$. Ces conditions qui sont exprimées par (1.17) impliquent que la couche externe étendue contient la couche externe et en constitue une extension stricte, que la couche interne étendue contient la couche interne et en constitue une extension stricte, enfin que les deux couches étendues se recouvrent. Le domaine de recouvrement peut alors être défini à l'aide d'une classe de fonctions $\delta(M_\infty)$, telles que δ soit d'ordre supérieur à δ_1 et d'ordre inférieur à δ_2, ce qu'expriment (1.17 b-c) : le domaine de recouvrement ou couche intermédiaire est défini par la condition que β est du même ordre que $\delta(M_\infty)$. Les conditions imposées à δ impliquent que la couche intermédiaire est commune aux deux couches étendues. L'équation (91) montre que si l'on définit $\alpha_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})$ par la condition

(92) $$\alpha_\varepsilon = \int_{\delta(M_\infty)}^{\pi/2} \Gamma(M_\infty \sin\omega) \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{g^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right) d\omega ,$$

alors l'on a

(93) $$\zeta_2 = 1, \qquad \text{dans la couche intermédiaire.}$$

La définition (92) est une définition asymptotique dans le sens suivant : considérons deux fonctions $\delta'(M_\infty)$ et $\delta''(M_\infty)$ vérifiant les conditions (1.17), à chacune de ces fonctions correspond, par (92) une fonction différente $\alpha'_\varepsilon(M_\infty)$ et $\alpha''_\varepsilon(M_\infty)$, mais l'on a

(94) $$\lim_{M_\infty \to \infty} \frac{\alpha'_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})}{\alpha''_\varepsilon(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})} = 1 ,$$

ainsi qu'il a été expliqué dans l'introduction. Il n'y a alors pas lieu de considérer que α'_ε et α''_ε sont différents. D'un point de vue pratique, le calcul de α_ε par (92) a été discuté à propos de la formule (1.38).

Il est maintenant facile de prolonger l'écoulement interne dans la couche intermédiaire en utilisant la fonction $\Xi(\beta)$ donnant la valeur de x_2 sur l'onde de choc :

(95) $$x_2 = \frac{a^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \Xi(\beta, M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty; \mathcal{F}) .$$

---

*La fonction $g(\beta)$ ainsi introduite est celle de la formule (1.27), à ne pas confondre avec la fonction $g(z)$ de (2.16). Voir à ce sujet la note au bas de la p. 96.

Les formules (63) et la relation (93) montrent en effet que l'écoulement interne prolongé dans la couche intermédiaire est défini par les formules

$$
(96)\quad
\begin{cases}
x_1 = a A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})\,\zeta_1, & a)\\
x_2 = \dfrac{a^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\,\Xi(\delta(M_\infty), M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a), & b)\\
p_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}; a) = \gamma_\infty k^{*2} p_\infty \hat p(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), & c)\\
\rho_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}; a) = & d)\\
\quad = \rho_\infty [\gamma_\infty k^{*2} \hat p(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma)]^{\frac{1}{\bar\gamma}}\,\Gamma^{-1}(M_\infty \sin\delta(M_\infty); p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma), & \\
V_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}; a) = U_\infty, & e)\\
\theta_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}; a) = \dfrac{k^*}{M_\infty}\hat\theta(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), & f)\\
r_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}; a) = & g)\\
\quad = a\,\dfrac{k^*}{M_\infty} A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})\,\hat r(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), & \\
z_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}; a) = & b)\\
\quad = a A_\varepsilon(M_\infty; k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})\,\hat z(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), & \\
h_{\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = \hat h_1(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), & i)\\
h_{2\text{int}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = \left(\dfrac{M_\infty}{a k^* A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})}\right)^{\varepsilon} & j)\\
[\gamma_\infty k^{*2}\hat p(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma)]^{-\frac{1}{\bar\gamma}}\,[\hat r(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma)]^{-\varepsilon}\,\Gamma(M_\infty \sin\delta(M_\infty); p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma). &
\end{cases}
$$

Il faut maintenant prolonger dans la couche intermédiaire l'écoulement externe, défini par les formules (33). Pour cela, l'on remarque d'abord que l'on a

$$
(97)\qquad \left(\frac{M_\infty}{k^* A_\varepsilon(M_\infty, k^*)}\right)^{1+\varepsilon}\frac{x_2}{a^{1+\varepsilon}} = 0, \text{ dans la couche intermédiaire.}
$$

D'après (66), cette relation est une conséquence de la suivante

$$
(98)\qquad \lim_{M_\infty\to\infty}\frac{\alpha_\varepsilon(M_\infty)\,a^{1+\varepsilon}}{x_2\,(k^*)^{2/\gamma}} = +\infty, \quad \text{dans la couche intermédiaire.}
$$

Or, l'on a manifestement, dans la couche intermédiaire,

$$
(99)\qquad \frac{\alpha_\varepsilon a^{1+\varepsilon}}{x_2} = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}\Gamma\left\{M_\infty \sin\beta(t)\right\}dt,
$$

de sorte que (98) résulte de ce que l'on a

$$
(100)\qquad \lim_{M_\infty\to\infty}\Gamma = \infty,
$$

uniformément dans la couche interne étendue, comme le montre (1.36).

Dans ces conditions, d'après (33), (43), (45), (46), (47), (48), (49), (97), le prolongement de l'écoulement externe dans la couche intermédiaire est défini par les formules

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x_1 = a A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})\zeta_1, && a)\\
& x_2 = \frac{a^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}\left[\frac{k^*}{M_\infty} A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})\right]^{1+\varepsilon} \Xi^*(\beta^*; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), && b)\\
& p_{ext}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = \gamma_\infty k^{*2} p_\infty \tilde p(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), && c)\\
& \rho_{ext}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = \rho_\infty\left[\gamma_\infty k^{*2} \tilde p(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma)\right]^{\frac{1}{\bar\gamma}} && d)\\
& \qquad \Gamma^{-1}(k^*\beta^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma),\\
& V_{ext}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = U_\infty, && e)\\
& \theta_{ext}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = \frac{k^*}{M_\infty}\tilde\theta(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), && f)\\
& r_{ext}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = a\frac{k^*}{M_\infty} A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}) && g)\\
& \qquad \tilde r(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma),\\
& h_{1_{ext}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = 1, && h)\\
& h_{2_{ext}}(x_1, x_2; M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}, a) = \left(\frac{M_\infty}{a k^* A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})}\right)^{\varepsilon}\cdot && i)\\
& \cdot\left(\gamma_\infty k^{*2}\tilde p(G_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma)\right)^{-\frac{1}{\bar\gamma}}\left(\tilde r(G_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma)\right)^{-\varepsilon}\Gamma(k^*\beta^*; p_\infty; T_\infty, \gamma_\infty; \bar\gamma),
\end{aligned}
\right. \tag{101}
$$

Les formules (96) et (101) définissent le prolongement des écoulements interne et externe dans la couche intermédiaire commune. Pour exprimer la condition de raccord il suffit d'écrire que (96) et (101) sont asymptotiquement identiques. Cela donne

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \hat p(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma) = \tilde p(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), && a)\\
& \hat\theta(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma) = \tilde\theta(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), && b)\\
& \hat r(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma) = \tilde r(\zeta_1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma), && c)\\
& \hat h_1(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma) = 1, && d)\\
& \hat z(\zeta_1, 1; k^*; \gamma_\infty, \bar\gamma) = \zeta_1, && e)
\end{aligned}
\right. \tag{102}
$$

$$
k^*\beta^* = M_\infty \sin\delta(M_\infty), \tag{103}
$$

$$
\lim_{M_\infty\to\infty}\left(\frac{k^* A_\varepsilon(M_\infty, k^*; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F})}{M_\infty}\right)^{1+\varepsilon}\frac{\Xi^*\left(\frac{M_\infty}{k^*}\sin\delta(M_\infty); k^*, \gamma_\infty, \bar\gamma\right)}{\Xi\left(\delta(M_\infty), M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar\gamma; \mathcal{F}\right)} = 1. \tag{104}
$$

Grâce à (102) les formules (89) sont maintenant justifiées en toute rigueur. La condition (103) est manifestement compatible avec le fait que l'on est dans la couche intermédiaire. Enfin la condition (104) apparaît comme une condition du type condition initiale sur la forme de l'onde de choc. Elle indique que, à l'échelle de l'écoulement externe la forme de l'onde de choc au voisinage du bord d'attaque est conditionnée par la forme de l'onde de choc très loin de ce dernier quand on se place à l'échelle qu'il convient pour examiner le détail de l'écoulement dans la région de ce même bord d'attaque. Ainsi puisque, d'après (30), la couche externe ne s'étend pas jusqu'en $\bar{x}_1 = 0$, le comportement de l'onde de choc de l'écoulement externe dans le voisinage de $\bar{x}_1 = 0$ n'est pas connu; ce comportement est l'une des inconnues du problème actuel, et ne peut être obtenu que par comparaison comme en (104) avec une solution valable dans la région du bord d'attaque.

Il est clair que, grâce à (89 d), la relation (102 c) coïncide avec la relation (51) car

$$f^*(\bar{x}_1, k^*) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{k}{k^*}\right)^{1-m} f\left(\lambda\left(\frac{k}{k^*}\right)^m \zeta_1\right). \tag{105}$$

Mise à part la question des conditions initiales, qui va être posée dans le paragraphe suivant sans pouvoir être résolue, le lecteur est maintenant en mesure de formuler de manière précise un problème aux limites pour la couche externe, qui doit remplacer le problème aux limites de la théorie conventionnelle du chapitre I, lorsque, à l'obstacle idéalisé pour lequel est valable la théorie conventionnelle, est substitué l'obstacle réel qui, lui, relève de la présente théorie. Cela n'est plus qu'une simple question d'écriture. Toutefois, comme le lourd formalisme précédent, qui était nécessaire pour mettre en lumière les divers aspects de la question, n'a plus aucun rôle à jouer dans le résultat, une formulation débarrassée de ce formalisme est donnée, au cours du §2.8, à l'intention des lecteurs qui se seront contentés des explications données dans l'introduction.

III,2.7. *REMARQUES SUR LES CONDITIONS INITIALES.*

L'analyse qui précède n'est en principe valable que si k et k^* sont tous deux finis. En conséquence il peut paraître inutile d'avoir introduit deux paramètres différents. En réalité le procédé est intéressant car la représentation obtenue est encore valable lorsque $k^* \to \infty$. Pour se rendre compte de ce fait il suffit de reprendre pas à pas l'analyse précédente en supposant que k^* est non plus fixe, mais fonction de M_∞ :

$$k^* = k^*(M_\infty). \tag{106}$$

Rien n'est changé au passage à la limite externe pourvu que

$$\lim_{M_\infty \to \infty} \frac{k^*(M_\infty)}{M_\infty} = 0. \tag{107}$$

En ce qui concerne le passage à la limite interne, la condition (107) assure la validité de (79) et (83). Il reste seulement la relation (68) qui exige

$$\lim_{M_\infty \to \infty} \frac{\left(k^*(M_\infty)\right)^{\frac{2}{\gamma}}}{\Gamma(M_\infty \sin \beta)} = 0 \tag{108}$$

et la présence du terme exponentiel dans Γ assure que (108) est une conséquence de (107). Le raccord entre les deux couches ne fait pas davantage de difficulté pourvu que

$$\lim_{M_\infty \to \infty} \frac{M_\infty \, \delta_1(M_\infty)}{k^*(M_\infty)} = \infty, \tag{109}$$

les autres conditions imposées à δ_1 et δ_2 étant vérifiées.

Ainsi est-il clair que le schéma précédent de séparation en couche externe et couche interne se laisse étendre à un voisinage de $k^* = \infty$. Il est clair que la représentation de l'écoulement dans ce voisinage est obtenue en faisant $k^* = \infty$ dans les formules des § précédents. En particulier, compte tenu de (89 d), la condition (102 c) s'écrit, lorsque k/k^* est très inférieur à l'unité :

$$\tilde{r}(\zeta_1; k^*) = \left\{ (1+\varepsilon)[\gamma_\infty \tilde{p}(\zeta_1; k^*)]^{-\frac{1}{\bar{\gamma}}} + \left[\frac{k}{k^*}(f'(0))\zeta_1\right]^{1+\varepsilon} \right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}, \tag{110}$$

et il est clair que les fonctions $\tilde{r}(\zeta_1, \infty)$ et $\tilde{p}(\zeta_1, \infty)$ vérifient la relation

$$[\gamma_\infty \tilde{p}(\zeta_1, \infty)]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} [\tilde{r}(\zeta_1, \infty)]^{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon. \tag{111}$$

Comme la forme de l'obstacle idéalisé ne peut intervenir que par l'intermédiaire de la relation (110) et que cette intervention a disparu dans (111), il est donc établi que l'écoulement limite correspondant à $k^* \to \infty$, est un écoulement type indépendant de la forme de l'obstacle idéalisé et ne dépendant par suite que de la forme du bord d'attaque. Le problème de la recherche des conditions initiales plusieurs fois évoqué dans ce qui précède se réduit, en fait, à la recherche de l'écoulement type précédent. L'écoulement externe associé relève naturellement des équations (34) (35) (36) assorties de conditions aux limites spéciales qui sont la condition (111) précédente et les conditions (40) et (42) sur l'onde de choc.

Une formulation intrinsèque peut être obtenue de la manière suivante. Soit

$$\bar{x}_2 = g^*(\bar{x}_1, \infty), \tag{112}$$

l'équation de l'onde de choc, les variables ξ et η suivantes sont introduites

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 + \operatorname{Log} \dfrac{g^*(\bar{x}_1)}{g_0^*}, \\ \eta = (1+\varepsilon) \dfrac{\bar{x}_2}{(g^*(\bar{x}_1))^{1+\varepsilon}}. \end{cases} \tag{113}$$

La fonction inconnue $g^*(\bar{x}_1)$ est remplacée par la fonction de ξ suivante

$$G(\xi) = -\frac{g^{*\prime\prime}\, g^*}{g^{*\prime 2}}, \tag{114}$$

moyennant quoi il est clair que g^* et $g^{*\prime}$ sont données par les relations

$$g^* = g_0^*\, e^{(\xi - \xi_0)}, \qquad g^{*\prime} = g_0\, F_0\, F(\xi, \xi_0)\, e^{(\xi - \xi_0)}, \tag{115}$$

avec

$$F(\xi, \xi_0) = \exp\left\{ -\int_{\xi_0}^{\xi} [G(\xi') + 1]\, d\xi' \right\}. \tag{116}$$

Finalement, après avoir posé :

$$\begin{cases} p^* = \dfrac{2}{\bar{\gamma}+1}\, g_0^{*2} F_0^2\, F^2(\xi, \xi_0)\, e^{2(\xi - \xi_0)} \mathcal{P}(\xi, \eta), \\ \rho^* = \dfrac{\bar{\gamma}+1}{\bar{\gamma}-1} \mathrm{P}(\xi, \eta), \\ \theta^* = \dfrac{2}{\bar{\gamma}+1}\, g_0^* F_0\, F(\xi, \xi_0)\, e^{\xi - \xi_0}\, \Theta(\xi, \eta), \\ r^* = g_0^*\, e^{\xi - \xi_0}\, \mathcal{R}(\xi, \eta), \\ h_2^* = \dfrac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}+1}\, g_0^{*-\varepsilon}\, e^{-\varepsilon(\xi - \xi_0)} \mathcal{H}(\xi, \eta), \end{cases} \tag{117}$$

un calcul facile montre que les fonctions $\mathcal{P}$, ρ, Θ, $\mathcal{R}$, $\mathcal{K}$ doivent vérifier les équations aux dérivées partielles

$$(118)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} - (1+\varepsilon)\,\eta\,\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} + \mathcal{R} = \dfrac{2}{\bar{\gamma}+1}\,\Theta, \\ (1+\varepsilon)\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} = \dfrac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}+1}\,\mathcal{K}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi} - (1+\varepsilon)\eta\dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial \eta} - \varepsilon\,\mathcal{K} = \dfrac{2}{\bar{\gamma}-1}\,\dfrac{\partial \Theta}{\partial \eta}, \\ \rho\,\mathcal{K}\,\mathcal{R}^{\varepsilon} = 1 \\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial \xi} - (1+\varepsilon)\,\eta\,\dfrac{\partial \Theta}{\partial \eta} + (1+\varepsilon)\,\mathcal{R}^{\varepsilon}\,\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta} = G(\xi)\,\Theta, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} - (1+\varepsilon)\,\eta\,\dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)(\mathcal{P}\rho^{-\bar{\gamma}}) - 2\,G\,\mathcal{P}\,\rho^{-\bar{\gamma}} = 0, \end{cases}$$

et les conditions aux limites

$$(119)\qquad \mathcal{P}(\xi,1) = \mathcal{R}(\xi,1) = \Theta(\xi,1) = \mathrm{P}(\xi,1) = \mathcal{K}(\xi,1) = 1,$$

$$(120)\qquad \left[\mathcal{R}(\xi,0)\right]^{1+\varepsilon}\left(\mathcal{P}(\xi,0)\right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} = A(\xi_0)\,\exp\left\{\int_{\xi_0}^{\xi}\left[\frac{2}{\bar{\gamma}}G(\xi') - (1+\varepsilon)\right]d\xi'\right\}$$

La constante $A(\xi_0)$ est donnée par

$$(121)\qquad A(\xi_0) = \left(\gamma_\infty\,\frac{2}{\bar{\gamma}+1}\right)^{-\frac{1}{\bar{\gamma}}}(1+\varepsilon)\,(g_0^{*2}F_0^2)^{-\frac{1}{\bar{\gamma}}}\,g_0^{*\,-(1+\varepsilon)}.$$

La réalisation d'un quelconque progrès dans la connaissance de l'écoulement au voisinage du nez, et par voie de conséquence dans la connaissance de l'écoulement dans son ensemble, est lié à l'obtention de solutions des équations (118) (119) et (120). C'est là une tâche fort ardue et le seul résultat qu'il soit possible d'avancer est que la tentative consistant à admettre que les diverses fonctions $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, Θ, ρ, $\mathcal{K}$ sont indépendantes de ξ avec

$$(122)\qquad G(\xi) = \frac{\bar{\gamma}(1+\varepsilon)}{2},$$

est vouée à l'échec comme il résulte des travaux de SEDOV [44], LEES et KUBOTA [35]. Ce point sera discuté dans le paragraphe suivant. Le lecteur pourra se convaincre que, avec $G(\xi)$ constant et donné par (122), la fonction $g^*(\bar{x}_1, \infty)$ est de la forme $g^* \alpha \bar{x}_1^n$, l'exposant n étant égal à $\dfrac{2}{2+\bar{\gamma}(1+\varepsilon)}$.

La solution recherchée est doublement asymptotique car elle représente simultanément l'écoulement asymptotique loin du bord d'attaque lorsque l'épaisseur de ce dernier est pris pour échelle, mais elle représente également l'écoulement asymptotique au voisinage du nez de l'obstacle idéalisé lorsque la corde de ce dernier est prise pour échelle M.P. GERMAIN* a montré que de tels écoulements asymptotiques devaient être homogènes c'est-à-dire rester invariants par le groupe de l'équation, or la seule solution homogène compatible avec (120) est

---

*Leçons non publiées données à la Faculté des Sciences de PARIS en 1957-1958.

donnée par (122), ce qui paraît inquiétant d'après le résultat négatif précédent. A tout prendre toutefois, il n'y a rien là de contradictoire, car le raisonnement de M.P. GERMAIN est essentiellement basé sur l'hypothèse que la solution asymptotique en question est valable dans un voisinage arbitraire de $\bar{x}_1 = 0$, c'est-à-dire dans un voisinage arbitraire de $\xi = -\infty$. Or les considérations du début du présent paragraphe montrent clairement que la solution asymptotique actuellement recherchée n'est valable que dans un voisinage très restreint de $\bar{x}_1 = 0$.

En présence de telles difficultés, la seule issue possible paraît être d'attaquer le problème à l'aide de l'approximation newtonienne; cela devrait se faire en étudiant le *problème 2* posé dans la section 3 du chapitre I. Cette question sera abordée dans le paragraphe 3.2, mais il ne s'agit que d'une tentative limitée et de nouveaux efforts sont nécessaires avant qu'un résultat positif soit obtenu dans cette voie.

III,2.8. *CONCLUSION. LE PROBLÈME AUX LIMITES FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES PETITES PERTURBATIONS POUR UN OBSTACLE PRÉSENTANT UN NEZ ÉMOUSSÉ.*

Le problème qui est examiné dans ce paragraphe est de savoir quel problème aux limites doit, pour l'obstacle idéalisé de la figure 1, remplacer le problème aux limites conventionnel de la théorie des petites perturbations, lorsqu'il est tenu compte de la présence d'un nez émoussé. Le formalisme des paragraphes précédents n'est plus nécessaire désormais et il est de nouveau fait usage de variables physiques. L'obstacle idéalisé de la figure 1 a pour équation

$$r = f(z), \qquad 0 < z < 1, \tag{123}$$

et l'onde de choc correspondante est

$$r = g(z). \tag{124}$$

Les équations du mouvement sont celles de la théorie des petites perturbations, c'est-à-dire – l'écoulement est supposé stationnaire – :

$$\begin{cases} U_\infty \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho r^\varepsilon) + \dfrac{\partial}{\partial r}(\rho r^\varepsilon w) = 0, \\ U_\infty \dfrac{\partial w}{\partial z} + w \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \left(U_\infty \dfrac{\partial}{\partial z} + w \dfrac{\partial}{\partial r}\right)(p\rho^{-\gamma}) = 0. \end{cases} \tag{125}$$

Sur l'onde de choc les conditions aux limites sont les suivantes –en gaz parfait–

$$\begin{cases} \dfrac{p[z, g(z)]}{p_\infty} = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 g'^2(z) - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}, \\ \dfrac{\rho(z, g(z))}{\rho_\infty} = \dfrac{(\gamma+1) M_\infty^2 g'^2(z)}{(\gamma-1) M_\infty^2 g'^2(z) + 2}, \\ \dfrac{w(z, g(z))}{U_\infty} = \dfrac{2}{\gamma+1} g'(z)\left(1 - \dfrac{1}{M_\infty^2 g'^2(z)}\right). \end{cases} \tag{126}$$

Sur une ligne

$$r = R(z), \tag{127}$$

qui n'est pas l'obstacle, mais qui est confondue avec la frontière commune entre la couche

interne et la couche externe, la condition suivante doit être vérifiée

$$\left\{\big(R(z)\big)^{1+\varepsilon}-\big(f(z)\big)^{1+\varepsilon}\right\}\left(\frac{p\big(z,R(z)\big)}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=(1+\varepsilon)a^{1+\varepsilon}\,\alpha_\varepsilon(M_\infty;p_\infty,T_\infty,\gamma_\infty;\mathcal{F}). \tag{128}$$

Dans cette formule $2a$ désigne l'épaisseur du bord d'attaque ou de la pointe, définie, d'une manière conventionnelle comme sur la figure 1, ou si l'on préfère par

$$a=z_0 f'(0),$$

z_0 étant très petit par rapport à la corde c de l'obstacle, prise pour unité :

$$z_0 \ll 1.$$

La fonction $\alpha_\varepsilon(M_\infty;p_\infty,T_\infty,\gamma_\infty;\mathcal{F})$ qui caractérise l'importance de l'effet de bord d'attaque émoussé dépend essentiellement du nombre de Mach M_∞, et de la forme du bord d'attaque émoussé $\mathcal{F}$, mais également, dans une certaine mesure, du niveau de pression p_∞ et de température T_∞ dans l'écoulement incident, ceci en raison des effets de gaz réels, et naturellement de γ_∞. Soit $p/p_\infty=\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma}.\,[G(S)]^{\gamma}$ l'équation d'état du gaz et

$$\rho_\infty U_\infty a^{1+\varepsilon}\psi, \tag{129}$$

la fonction de courant, la fonction α_ε est définie par l'intégrale

$$\alpha_\varepsilon(M_\infty;p_\infty,T_\infty,\gamma_\infty;\mathcal{F})=\int_0^{\psi_0}G(S(\psi))d\psi, \tag{130}$$

calculée sur l'onde de choc détachée en amont de l'obstacle réel. La borne supérieure ψ_0 n'a pas à être définie avec précision, lorsque la théorie asymptotique présentée ici est valable, c'est-à-dire lorsque le nombre de Mach est assez grand. En effet une légère incertitude sur ψ_0 n'affecte pas d'une manière sensible la valeur de α_ε. Ceci constitue même la meilleure définition pratique de ψ_0 : l'intégration qui définit α_ε est arrêtée lorsqu'un nouveau prolongement n'a pas d'action appréciable sur la valeur de α_ε –en valeur relative s'entend–. Si le nombre de Mach est modéré, on pourra avoir des difficultés dans cette détermination de α_ε.

Les équations (125) et les conditions aux limites (126) et (128) ne sont pas suffisantes pour assurer la détermination de l'écoulement, car, l'onde de choc n'étant pas attachée à la pointe de l'obstacle idéalisée, il y a des conditions initiales qui font défaut et qu'il est nécessaire de déterminer. Nous ne sommes pas en mesure de définir avec précision les conditions initiales en question, mais nous pouvons au moins poser le problème que soulève leur détermination.

Lorsque z décroît dans le voisinage de $z=0$, il est clair que $R'(z)/f'(z)$ croît au delà de toute limite, il en résulte que, assez près de $z=0$, la condition (127) peut s'écrire

$$(R(z))^{1+\varepsilon}\left(\frac{p(z,R(z))}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=(1+\varepsilon)\,a^{1+\varepsilon}\,\alpha_\varepsilon(M_\infty;p_\infty,T_\infty,\gamma;\mathcal{F}), \tag{131}$$

d'autre part $M_\infty g'(z)$ est du même ordre que $M_\infty R'(z)$ qui augmente indéfiniment, il en résulte que là où la condition (131) est valable, les conditions (125) peuvent être remplacées par

$$\begin{cases}\dfrac{p[z,g(z)]}{p_\infty}=\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\,M_\infty^2\,g'^2(z),\\[2ex]\dfrac{\rho(z,g(z))}{\rho_\infty}=\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1},\\[2ex]\dfrac{w(z,R(z))}{U_\infty}=\dfrac{2}{\gamma+1}\,g'(z).\end{cases} \tag{132}$$

La condition initiale précédemment mentionnée n'est autre que le raccord, au voisinage de $z=0$, entre la solution du problème initial et une solution du problème (125) (131) (132). Or

ce dernier problème est indépendant de la forme de l'obstacle idéalisé. Ceci est un point important, dans le voisinage du nez l'écoulement est un écoulement type ne dépendant pas de la forme de l'obstacle –idéalisé–. Mais lorsqu'il s'agit de déterminer effectivement un tel écoulement les difficultés commencent. S'agit-il d'un écoulement type ne faisant intervenir que le facteur d'échelle α_ε, ou bien la nature du bord d'attaque affecte-t-elle plus profondément la nature de l'écoulement ? Il n'est pas possible de répondre. En tous cas il ne s'agit pas d'un écoulement homogène au sens donné à ce terme par M.P. GERMAIN*. En effet, s'il en était ainsi l'on aurait

$$R(z) \cong R_0 z^n, \qquad \frac{p(z, R(z))}{p_\infty} \cong P_0 z^{2(n-1)}, \tag{133}$$

et la condition (131) exigerait que l'on ait

$$n = \frac{2}{2 + \bar{\gamma}(1+\varepsilon)}, \tag{134}$$

mais, les solutions homogènes n'ont d'existence mathématique que pour

$$n \geqslant \frac{2}{3+\varepsilon}. \tag{135}$$

Ainsi, ce n'est qu'en approximation newtonienne ($\bar{\gamma} = 1$) que l'écoulement au voisinage du nez est homogène. Cet écoulement homogène est un écoulement isoénergétique par lequel une solution exacte a été obtenue par SEDOV [44], solution que l'on peut trouver également dans le chapitre II du livre de HAYES et PROBSTEIN [26]. Que, en approximation newtonienne, l'écoulement au voisinage du nez soit un écoulement homogène isoénergétique n'est pas tellement pour nous surprendre puisque, lorsque $\bar{\gamma} = 1$, les termes isoénergétiques, isotherme et isentropique ont la même signification. Cette question de l'écoulement au voisinage du nez en approximation newtonienne sera examinée dans la section suivante.

La dernière question importante avant de passer aux applications est celle des valeurs numériques de α_ε. Il est clair qu'il ne saurait être question de fournir une formule explicite puisque la forme de l'onde de choc n'est pas connue. A titre d'indication nous donnons ci-dessous les valeurs de α_ε comme fonction de M_∞ pour un profil d'aile à nez arrondi en forme de cylindre circulaire. La forme de l'onde de choc a été choisie telle qu'elle est donnée par l'approximation newtonienne. Le résultat est indiqué sur la figure 8. La courbe donnant α_ε a été tracée en trait interrompu en dessous de $M_\infty = 15$ pour marquer que l'hypothèse (1.29) qui est à la base de la théorie ne peut pas être raisonnablement considérée comme vérifiée pour $M_\infty < 15$. Cela montre que la théorie présentée ici ne peut être considérée comme valable que pour des nombres de Mach dépassant 15. Les calculs ont été faits en considérant l'air comme un gaz

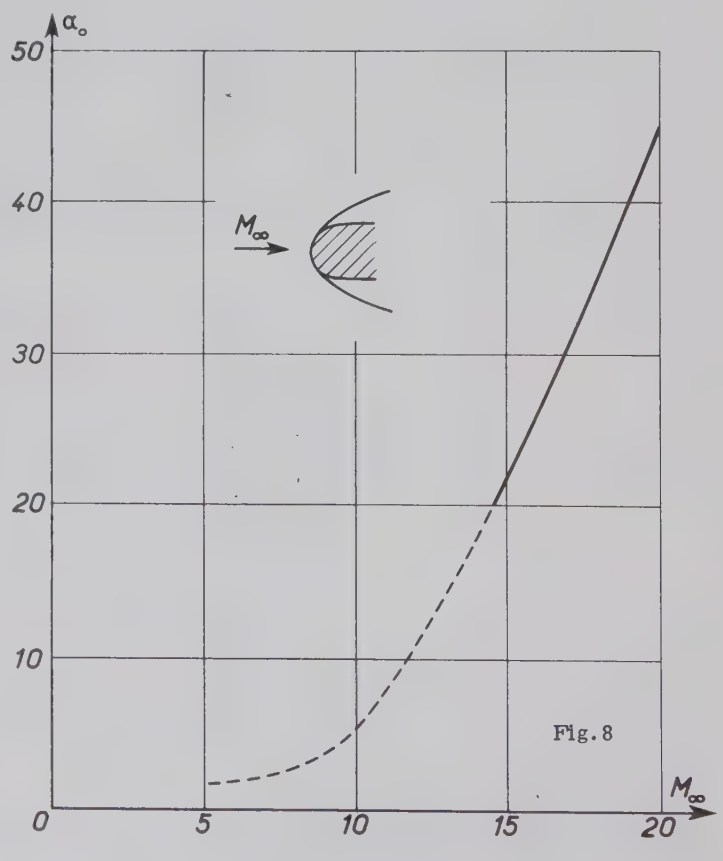


Fig. 8

*Leçons non publiées données à la Faculté des Sciences de PARIS (1957-1958).

réel; en gaz parfait la situation serait encore plus défavorable car à M_∞ égal le saut d'entropie ΔS serait beaucoup plus faible. En attendant que de nouveaux calculs aient été faits, et surtout que l'on dispose de confrontations expérimentales, il est difficile de considérer α_ε autrement que comme un paramètre dont la valeur est mal connue. La courbe de la figure 8 doit donc être considérée comme donnant seulement une indication très imprécise sur l'ordre de grandeur de α_ε. Il faut dire que cette courbe est basée sur l'utilisation simultanée de la loi $p/p_\infty = (\rho/\rho_\infty)^\gamma \exp(\Delta S/c_v)$ et des valeurs réelles de ΔS, ce qui est contestable.

III,3. APPLICATIONS.

Dans cette section, quelques applications des principes précédemment développés sont envisagées. Il va sans dire qu'il ne saurait être question de chercher à résoudre le problème aux limites posé au §2.8. Il sera donc indispensable de faire appel à des méthodes approximatives pour déterminer l'écoulement sur l'obstacle fictif (1.33), de sorte que tous les résultats obtenus dans cette section présentent nécessairement un caractère approximatif. Dans ces applications on prendra $\gamma_\infty = \bar{\gamma} = \gamma$.

III,3.1. *UTILISATION DES APPROXIMATIONS TANGENTIELLES.*

La première méthode que l'on pourrait être tenté d'utiliser est celle qui fut longuement étudiée au cours du chapitre II; pourtant il n'y faut point songer pour deux raisons. En premier lieu, il est essentiel pour l'application de la méthode de choc détente, que l'obstacle présente une pointe vive sur laquelle puisse s'attacher l'onde de choc de tête. Corrélativement il est nécessaire que l'entropie sur l'obstacle fictif soit bien définie, et ce n'est pas le cas ici car, si la frontière commune aux deux couches est bien définie dans le plan physique il n'en est pas de même dans le plan (β, S). En second lieu il est probable que les conditions (1.17) du chapitre II ne sont pas vérifiées en raison du gradient considérable d'entropie qui existe à la frontière de l'obstacle fictif; il est vrai pourtant que ces conditions (1.17) ne sont pas des conditions nécessaires.

La seconde idée qui vient naturellement à l'esprit est d'utiliser les approximations tangentielles définies par la formule (22) du chapitre I. Ainsi, l'équation de l'obstacle fictif étant $r = R_\varepsilon(z)$, la pression sur ce dernier est donnée par la relation

$$\frac{p(z)}{p_\infty} = P_\varepsilon(M_\infty R'_\varepsilon(z)). \tag{1}$$

La fonction $P_0(x)$ est susceptible d'une définition analytique explicite

$$P_0(x) = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}x^2 + \gamma x\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}x\right)^2 + 1}, \tag{2}$$

alors que $P_1(x)$ n'est connue que numériquement. Le comportement de $P_\varepsilon(x)$ au voisinage de $x = \infty$ sera utile; ce comportement est donné par

$$P_\varepsilon(x) \cong A_\varepsilon(\gamma)x^2, \tag{3}$$

et l'on a $A_0(\gamma) = \dfrac{\gamma(\gamma+1)}{2}$, alors que $A_1(\gamma)$ n'est connu que numériquement et vaut 1,465 pour $\gamma = 1{,}4$. L'équation de l'obstacle idéalisé étant $r = f(z)$, la relation (2.128) fournit l'équation différentielle

$$\left\{[R(z)]^{1+\varepsilon} - [f(z)]^{1+\varepsilon}\right\}\left\{P(M_\infty R'_\varepsilon(z))\right\}^{\frac{1}{\gamma}} = (1+\varepsilon)\,a^{1+\varepsilon}\alpha_\varepsilon. \tag{4}$$

En supposant que la pente du profil est en tout point positive, et en introduisant les notations :

$$(5)\qquad \begin{cases} f = a\zeta, \\ R_\varepsilon = a[\zeta + Z_\varepsilon(\zeta)], \\ M_\infty \dfrac{df}{dz} = K(\zeta), \end{cases}$$

il vient

$$(6)\qquad \left(\left\{\zeta + Z_\varepsilon(\zeta)\right\}^{1+\varepsilon} - \zeta^{1+\varepsilon}\right)\left\{P_\varepsilon\left[K(\zeta)\left(1 + \frac{dZ_\varepsilon}{d\zeta}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{\gamma}} = (1+\varepsilon)\,\alpha_\varepsilon .$$

Soit maintenant $Q_\varepsilon(y)$, la fonction inverse de $y = [P_\varepsilon(x)]^{\frac{1}{\gamma}}$

$$(7)\qquad Q_\varepsilon\left([P_\varepsilon(x)]^{\frac{1}{\gamma}}\right) = x,$$

l'on obtient l'équation différentielle suivante en :

$$(8)\qquad \frac{dZ_\varepsilon}{d\zeta} = \frac{Q_\varepsilon\left(\dfrac{(1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon}{(\zeta + Z_\varepsilon(z))^{1+\varepsilon} - \zeta^{1+\varepsilon}}\right)}{K(\zeta)} - 1 .$$

Tout se ramène donc à la recherche de la courbe intégrale de (8) qui passe par le point singulier $\zeta = Z = 0$. Dans le cas général cela ne peut se faire que numériquement. Toutefois, la forme de la courbe intégrale au voisinage du point singulier est facile à obtenir en utilisant (3) :

$$(9)\qquad Z_\varepsilon(\zeta) \cong \left\{\frac{[2+\gamma(1+\varepsilon)]\,[(1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon]^{\frac{\gamma}{2}}}{2K(0)\sqrt{A_\varepsilon(\gamma)}}\zeta\right\}^{\frac{2}{2+\gamma(1+\varepsilon)}},$$

et l'on obtient immédiatement

$$(10)\qquad P_\varepsilon(\zeta) = (1+\varepsilon)^\gamma \left\{\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{\gamma}{2}}[2+\gamma(1+\varepsilon)]}{2K(0)\sqrt{A_\varepsilon(\gamma)}}\,\frac{\zeta}{\alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\right\}^{-\frac{2\gamma(1+\varepsilon)}{2+\gamma(1+\varepsilon)}},$$

En revenant aux variables physiques, grâce à (5), l'on trouve

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{R_\varepsilon(z)}{a} \cong \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left\{\dfrac{[2+\gamma(1+\varepsilon)](1+\varepsilon)^{\frac{\gamma}{2}}}{2\sqrt{A_\varepsilon(\gamma)}}\,\dfrac{z}{aM_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\right\}^{\frac{2}{2+\gamma(1+\varepsilon)}}, & a) \\ \dfrac{p(z)}{p_\infty} \cong \left\{\dfrac{2A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{2+\gamma(1+\varepsilon)}\,\dfrac{aM_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{z}\right\}^{\frac{2\gamma(1+\varepsilon)}{2+\gamma(1+\varepsilon)}}. & b) \end{cases}$$

On peut remarquer que, en accord avec ce qui a été dit au § 2.8, le comportement de la solution au voisinage du nez ne dépend pas de la forme de l'obstacle idéalisé. En comparant avec les formules (11) on pourra constater que ce comportement est le même que pour une plaque plane –dans le cas du dièdre–.

Il est important de connaître le domaine de validité de (11). Ce domaine est délimité par une double condition. En premier lieu, les méthodes de la section 2 exigent que l'on soit très loin du nez –à l'échelle de ce dernier–, ce qui exige $z \gg a$. En second lieu il est nécessaire

que le second membre de (11 b) soit très supérieur à Max $\{K^2(0), 1\}$ qui est l'ordre de grandeur du rapport p/p_∞ pour l'obstacle idéalisé, à la pointe. Ainsi la double condition définissant le domaine de validité de (11) est-elle

$$(12) \qquad a \ll z \ll \frac{M_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{\left(\text{Max}\,\{K^2(0), 1\}\right)^{\frac{2+\gamma(1+\varepsilon)}{2\gamma(1+\varepsilon)}}} a.$$

Il est clair que les deux conditions ainsi exprimées sont compatibles si le nombre de Mach est suffisamment grand. Mais il est clair, également que le domaine de validité se resserre quand l'obstacle idéalisé s'épaissit.

Pour pousser plus avant il faut intégrer numériquement l'équation (8). Nous nous limiterons ici au cas de la plaque plane à bord d'attaque émoussé. On trouve alors, pour l'équation de l'obstacle fictif et pour la pression à la plaque plane :

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{R_o(z)}{a} = \alpha_o\, G_o\left(\dfrac{z}{aM_\infty \alpha_o}\right) \\ \dfrac{p_o(z)}{p_\infty} = \left[G_o\left(\dfrac{z}{aM_\infty \alpha_o}\right)\right]^{-\gamma}. \end{cases}$$

Les fonctions $G_o(u)$ et $[G_o(u)]^{-\gamma}$ sont tabulées ci-dessous pour $\gamma = 1{,}4$ ainsi que leurs développements asymptotiques :

$$(14) \qquad \begin{cases} G_o(u) = \left(\dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)}}\right)^{\frac{2}{\gamma+2}} u^{\frac{2}{\gamma+2}} \left\{1 - \dfrac{3\gamma+1}{(\gamma+1)(3\gamma+2)}\left(\dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} + \cdots\right\}, \\ (G_o(u))^{-\gamma} = \left(\dfrac{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)}}{\gamma+2}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} u^{-\frac{2\gamma}{\gamma+2}} \left\{1 + \dfrac{(3\gamma+1)\gamma}{(\gamma+1)(3\gamma+2)}\left(\dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

$G_o(u)$ valeur exacte, $G_o^{(1)}(u)$ premier terme de (14. a) $G_o^{(2)}(u)$ deux termes dans (14. b)

u	$G_o(u)$	$G_o^{(1)}(u)$	$G_o^{(2)}(u)$	$1-e^{-u}$	$[G_o(u)]^{-\gamma}$
0,001		0,021	0,021		221
0,0056		0,058	0,058		54,8
0,0105	0,08	0,081	0,080		34,33
0,0272	0,16	0,162	0,159		12,95
0,0712	0,24	0,249	0,237		7,42
0,1224	0,32	0,340	0,314		4,96
0,1896	0,40				3,59
0,2776	0,48				2,78
0,393	0,56				2,25
0,5416	0,64				1,861
0,7416	0,72				1,584
1,0296	0,80				1,366
1,2296	0,84				1,284
1,4976	0,88				1,195
1,8776	0,92				1,124
2,17	0,94				1,09
2,57	0,96			0,957	
3,24	0,98			0,9805	
5				0,993	
10				0,9995	

TABLEAU I

Sur la figure 9 on a représenté la distribution des pressions p/p_∞ en fonction de z/a pour une plaque plane, dont le nez est un cylindre de rayon a, placé dans un écoulement à $M_\infty = 20$, en adoptant la valeur $\alpha_0 = 45$ que l'on peut déduire de la courbe de la figure 8.

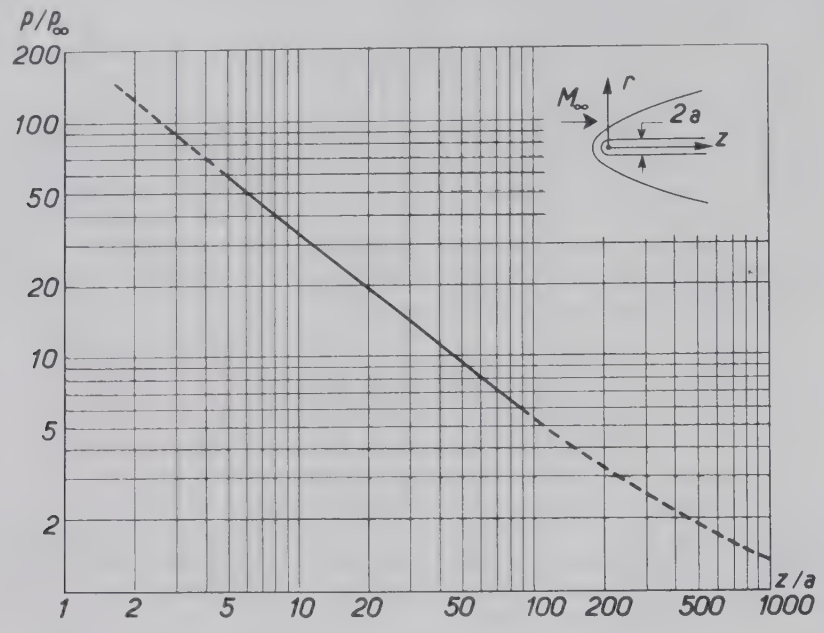


Fig.9 - Pression sur une plaque plane à nez cylindrique de rayon $a - M_\infty = 20$, pour $\alpha_0 = 45$.

III,3.2. *UTILISATION DE L'APPROXIMATION NEWTONIENNE.*

On a vu au cours du § 2.8 toute l'importance que présentait la connaissance de l'écoulement au voisinage de la pointe, mais on a vu également qu'il s'agissait là d'un problème extrêmement difficile. Il paraît donc utile de posséder une solution de ce problème, même si elle n'est que partielle et même si elle n'est que grossièrement approchée. A la vérité, en ce qui concerne la forme de l'obstacle fictif et la pression sur l'obstacle réel, une telle solution approchée est déjà connue par les formules (11) du § précédent. Mais les formules en question souffrent de deux graves défauts. En premier lieu, ce qui est souhaitable c'est une description complète de l'écoulement et non seulement la connaissance de la pression. En second lieu, les formules (11) n'ont que la valeur que l'on attribue à l'approximation tangentielle qui a servi à les établir. Or, comme toute loi empirique, l'approximation tangentielle n'a quelque valeur que dans le domaine strict où sa validité a été testée, et les écoulements considérés ici ne font pas précisément partie de ce domaine. Ainsi les formules (11) sont non seulement approximatives, comme tous les résultats obtenus dans cette section, elles sont mêmes largement entachées d'incertitude.

Les deux défauts précédents tombent si l'on substitue l'approximation newtonienne à l'approximation tangentielle. Il reste que la solution obtenue est approximative, il se peut même que –numériquement– elle soit plus éloignée de la réalité que ne le sont les formules (11). Toutefois, la méthode a cette fois une base théorique sérieuse; en construisant éventuellement une approximation d'ordre supérieur, on pourrait même obtenir une estimation de l'erreur commise.

Dans ces conditions le lecteur se demandera probablement pourquoi ne pas utiliser tout au long l'approximation newtonienne et écarter les calculs du paragraphe précédent. La raison en est que les résultats obtenus dans le présent paragraphe ne sont, à proprement parler, même en approximation newtonienne $-\gamma = 1-$, valables que si le paramètre hypersonique $M_\infty^2\, g'^2$ est

infiniment grand, ce qui n'est le cas que dans la région du bord d'attaque. En outre, au loin, lorsque l'effet d'émoussement cesse d'être prépondérant et n'intervient plus que comme une correction, l'efficacité de l'approximation tangentielle peut, cette fois, être considérée comme empiriquement acquise.

Quoiqu'il en soit de ces questions, le problème actuel se pose très simplement, puisqu'il conduit à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire. En approximation newtonienne la description de l'écoulement est complètement connue lorsque est connue la fonction $R_\varepsilon(z)$ donnant la forme de l'obstacle fictif, lequel est ici confondu avec l'onde de choc –il est intéressant de noter que, dans le schéma actuel, la couche interne est très épaisse par rapport à la couche externe–. Après avoir fait $\gamma = 1$, il suffit de substituer dans (2.128) la formule

$$\frac{p[z, R_\varepsilon(z)]}{p_\infty} = M_\infty^2 \left(R_\varepsilon'^2 + \frac{1}{1+\varepsilon} R_\varepsilon R_\varepsilon'' \right), \tag{15}$$

obtenue au chapitre I (formule 3.46). Il vient ainsi, pour déterminer $R_\varepsilon(z)$, l'équation différentielle

$$R_\varepsilon^{1+\varepsilon} \left(R_\varepsilon'^2 + \frac{1}{1+\varepsilon} R_\varepsilon R_\varepsilon'' \right) = a^{1+\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon}{M_\infty^2}. \tag{16}$$

En désignant par C une constante arbitraire, il n'est pas difficile de voir que toute solution de l'équation précédente vérifie

$$\left(\frac{dR_\varepsilon}{dz} \right)^2 = CR^{-2(1+\varepsilon)} + \frac{2\, a^{1+\varepsilon} \alpha_\varepsilon (1+\varepsilon)}{M_\infty^2} R^{-(1+\varepsilon)}. \tag{17}$$

Maintenant, une difficulté très sérieuse se présente due à la constante C qui devient l'une des inconnues du problème. En attendant que de nouveaux efforts aient contribué à éclaircir ce point –et la considération d'approximations d'ordre supérieur sera sans doute utile– l'attitude la plus raisonnable nous paraît être double.

En premier lieu, l'on peut se placer résolument en approximation newtonienne, et alors, à n'en pas douter, comme nous le verrons dans un instant, l'on a

$$C \neq 0. \tag{18}$$

En second lieu, on peut ne se placer que partiellement en approximation newtonienne, et alors C peut être pris nul. Réservons le premier point de vue et expliquons ce que nous entendons dans la phrase précédente. C'est un fait connu que le passage à la limite $\gamma \to 1$, $M_\infty \to \infty$ qui conduit à l'approximation newtonienne n'est pas uniformément valable. Ainsi, l'écoulement qui prend place sur un obstacle réel du type considéré ici, pour des valeurs raisonnables de γ, est certainement très différent, lorsque cet écoulement est considéré *dans son ensemble*, de l'écoulement limite obtenu lorsque γ est rigoureusement égal à l'unité. Cela n'empêche pas que, dans des domaines limités, de bonnes approximations puissent être obtenues en faisant usage de l'approximation newtonienne. Dans ces conditions, se placer résolument dans l'approximation newtonienne c'est considérer que l'écoulement, dans son ensemble, est très voisin de celui que l'on obtiendrait si $\gamma - 1$ était rigoureusement nul. Dans ces conditions, la constante C doit être déterminée en utilisant la condition (2.204) et en décrivant également l'onde de choc dans la région du bord d'attaque de l'obstacle réel au moyen de l'approximation newtonienne, c'est-à-dire par une onde de choc séparée de LIGHTHILL [36]. La couche externe de la présente théorie est alors le prolongement de ce que HAYES et PROBSTEIN [26] appellent une couche libre. Tel est le premier point de vue.

Ne se placer que partiellement en approximation newtonienne, cela veut dire que l'on fait usage de l'approximation newtonienne pour décrire certaines portions de l'écoulement mais que l'on admet la possibilité pour l'écoulement réel d'être, dans son ensemble encore une fois, très différent de l'écoulement précédent, obtenu par un passage à la limite non uniformément convergent. Dans ces conditions, ce n'est plus le raccord avec une couche libre qui doit assurer la détermination de la constante C. La pression sur l'obstacle est égale à $(1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon (a/R_\varepsilon)^{1+\varepsilon}$,

alors que la pression sur l'onde de choc vaut $2(1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon(a/R_\varepsilon)^{1+\varepsilon}+CM_\infty^2 R^{-2(1+\varepsilon)}$; il en résulte que lorsque l'on se rapproche du bord d'attaque $R\to 0$ et que par suite le rapport entre la pression sur l'onde de choc et la pression sur l'obstacle augmente indéfiniment si $C\neq 0$. Cette conclusion étant difficile à admettre, l'on peut, à titre de conjecture admettre que

(19) $$C=0,$$

dans le second point de vue. Mais ceci n'est qu'une conjecture. Que devient en particulier la condition (2.104). Faut-il admettre que cette condition est automatiquement vérifiée avec $C=0$, parce que la forme de l'onde de choc que l'on en déduit au voisinage de $z=0$ est précisément la forme asymptotique de l'onde de choc loin du nez –à l'échelle de ce dernier–. Ou bien faut-il admettre que la condition est inexacte, l'argumentation qui y conduit étant fallacieuse, parce que (17) n'est pas valable dans un voisinage arbitraire de $R=0$, et que dans le voisinage où elle est valable, C a précisément une valeur telle que les deux termes au second membre de (17) soient du même ordre. Mais alors nos connaissances sont insuffisantes pour déterminer C. Peut-être, en passant à une approximation d'ordre supérieur, une condition de non contradiction permettrait-elle de se faire une idée plus précise sur la validité de (19).

Quoiqu'il en soit de cette difficile question, si l'on se fait une règle, en l'absence de critère plus sûr, d'opter pour la simplicité, il est clair qu'il faut admettre (19). L'équation (17) s'intègre alors instantanément, et l'on trouve

(20) $$\begin{cases} \dfrac{R(z)}{a}=\left(\dfrac{(1+\varepsilon)(3+\varepsilon)^2\alpha_\varepsilon}{2M_\infty^2}\right)^{\frac{1}{3+\varepsilon}}\left(\dfrac{z}{a}\right)^{\frac{2}{3+\varepsilon}}, \\ \dfrac{p(z,R(z))}{p_\infty}=\left((1+\varepsilon)\alpha_\varepsilon\right)^{\frac{2}{3+\varepsilon}}\left(\dfrac{2M_\infty^2}{(3+\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{3+\varepsilon}}\left(\dfrac{a}{z}\right)^{\frac{2(1+\varepsilon)}{3+\varepsilon}}. \end{cases}$$

Pour $\epsilon=0$, les formules (20) sont identiques aux formules (7) de la référence [21], à condition de prendre $k^3\lambda=M_\infty\alpha_0$, seulement, la formule (8) de la référence [21] contient par erreur le facteur $(\gamma+1)/(\gamma-1)$, elle doit être écrite

(21) $$\lambda(M_\infty,k)=M_\infty k^{-3}\int_0^1 \xi\,\tilde{R}(\xi)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}M_\infty\xi\right)d\xi,$$

et la variable d'intégration ξ doit être prise égale à $\sin\beta$ et non à $M_\infty\sin\beta$. Le lecteur vérifiera sans peine l'identité de (1.31) et de (21) avec $k^3\lambda=\alpha_0 M_\infty$, pourvu que l'on adopte $A=1$, $B=0$ dans (1.35), ce qui n'est pas très éloigné de la vérité.

Revenons maintenant au premier point de vue. L'onde de choc séparée au-delà du point de cote r_0 sur l'obstacle est donnée par l'équation

(22) $$\frac{r^{1+\varepsilon}-r_0^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}=(\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\beta_0)\sin\beta_0\int_0^{r_0} r^\varepsilon\cos\beta\,dr.$$

Asymptotiquement –à l'échelle du nez émoussé– l'on a donc

(23) $$r^\varepsilon\frac{dr}{dz}\cong(1+\varepsilon)\sin\beta_0\int_0^{r_0} r^\varepsilon\cos\beta\,dr,$$

il en résulte que la condition (2.104) donne la valeur de C :

(24) $$C=\left\{(1+\varepsilon)\sin\beta_0\int_0^{r_0} r^\varepsilon\cos\beta\,dr\right\}^2.$$

Le lecteur pourra intégrer l'équation (3). Nous nous contenterons de faire remarquer que cette approximation newtonienne soulève bien des difficultés. En effet, si l'on fait résolument $\gamma=1$, l'analyse du paragraphe 2.5.2. est à revoir. Quel que soit le point de vue adopté, il est clair que de nouveaux efforts sont nécessaires.

III,3.3. *SIMILITUDE HYPERSONIQUE DES PROFILS MINCES A NEZ ÉMOUSSÉS.*

Nous reprenons la famille de profils affins

(25) $$r = \tau c f\left(\frac{z}{c}\right),$$

qui interviennent dans la loi de similitude hypersonique. Nous devons préciser les données relatives à l'émoussement. D'une part nous fixons la forme géométrique de l'émoussement en question - cette forme sera caractérisée par la variable symbolique $\mathcal{F}$, d'autre part nous faisons varier la dimension a de cet émoussement au même titre que nous faisons varier τ en conservant fixe la fonction f. L'écoulement incident est caractérisé par les variables p_∞, T_∞, M_∞, l'état thermodynamique du gaz par les exposants adiabatiques γ_∞ et γ. Pour des profils à bord parfaitement tranchant on sait que M_∞ et τ n'interviennent que par leur produit $M_\infty \tau$, Lorsque le bord d'attaque est émoussé le nombre de Mach intervient également dans le paramètre

(26) $$\alpha_0(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}).$$

Avec ce paramètre on construit une longueur caractéristique pour les effets d'émoussement qui est

(27) $$L_0 = aM_\infty \alpha_0.$$

Pour s'en convaincre il suffit de se reporter à la formule (2.66), ou encore à la formule (1.31) en notant que $\tau = 0(1/M_\infty)$. Dans ces conditions la combinaison sans dimensions suivante

(28) $$\frac{c}{L_0} = \frac{c}{aM_\infty \alpha_0},$$

est caractéristique des effets d'émoussement. Si l'on se souvient que des conditions initiales, dépendant de la structure de l'écoulement dans la région du nez peuvent *a priori* avoir un rôle à jouer, et si l'on traduit l'influence de système de conditions initiales par la variable symbolique $\mathcal{J}$, l'on voit que le coefficient de pression sur l'obstacle se met sous la forme

(29) $$c_p = \tau^2 F\left(\frac{z}{c}; M_\infty \tau; \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \frac{c}{aM_\infty \alpha_0(M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})}; \mathcal{J}\right).$$

Telle est la formule traduisant la loi de similitude des obstacles plans à nez émoussé. Pour avoir une loi valable également dans le cas des obstacles de révolution sans incidence il suffit d'écrire

(30) $$c_p = \tau^2 F_\varepsilon\left(\frac{z}{c}; M_\infty \tau; \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \frac{c}{aM_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}; \mathcal{J}\right).$$

En approximation tangentielle, la dépendance relativement à $\mathcal{J}$ disparaît, mais il est difficile de dire si cette disparition traduit le fait que l'importance de $\mathcal{J}$ est secondaire dans le cas général, ou bien si cette disparition est forfuite et tient au caractère très grossier de l'approximation tangentielle. Si la première éventualité était exacte la forme du bord d'attaque $\mathcal{F}$ n'interviendrait que pour fixer l'échelle α_ε.

La plaque plane et l'hémisphère cylindre, pour lesquels τ est nul, ne rentrent pas dans le cadre de la formule (30). Mais la modification nécessaire est évidente :

(31) $$c_p = \frac{1}{M_\infty^2} F_\varepsilon^{(0)}\left(\frac{z}{aM_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}; \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{J}\right).$$

Le fait que z/c et $\dfrac{c}{aM_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}$ n'interviennent que par leur produit provient de ce que l'obstacle idéalisé n'introduit pas de longueur caractéristique, la seule longueur caractéristique du problème est donc la longueur caractéristique d'émoussement $aM_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. Dans le cas du dièdre émoussé ou du cône émoussé il n'y a pas davantage de longueur caractéristique provenant

de l'obstacle idéalisé, et l'on a, τ désignant l'angle d'ouverture du cône ou du dièdre :

$$c_p = \tau^2 F_\varepsilon^{(1)}\left(\frac{z}{a M_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}; M_\infty \tau; \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{T}\right). \tag{32}$$

Il est clair que l'on obtient une loi englobant tous les cas en posant

$$c_p = \left(\tau^2 + \frac{1}{M_\infty^2}\right) F_\varepsilon\left(\frac{z}{c}; M_\infty \tau; \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \frac{c}{a M_\infty \alpha_\varepsilon^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}; \mathcal{T}\right). \tag{33}$$

III, 4. EXTENSION AUX ÉCOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS.

Nous nous proposons, dans cette section, d'étudier l'extension des résultats obtenus à certains écoulements tridimensionnels. Il s'agira toujours d'écoulements sur des ailes minces.

L'obstacle typique que nous considérons est aplati sur le plan $z = 0$, son bord d'attaque est émoussé. A cet obstacle réel nous associons un obstacle fictif comportant un bord d'attaque en forme d'arête parfaitement vive suivant la ligne $(\mathcal{C})$ du plan $z = 0$.

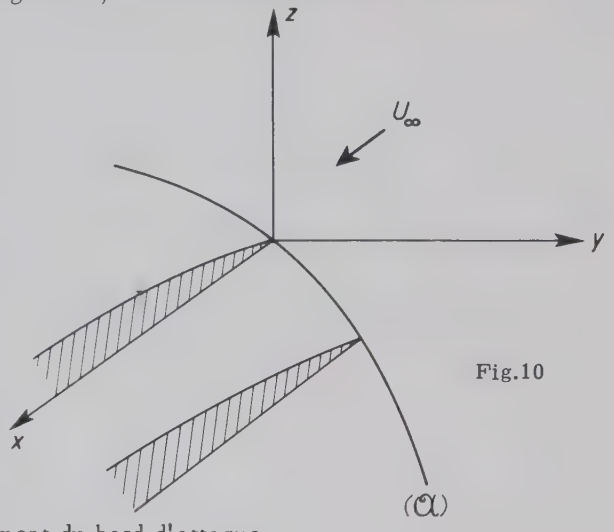


Fig.10

Comme dans les paragraphes précédents, on désignera par a une mesure de l'épaisseur du bord d'attaque réel.

On suppose que l'écoulement sur l'aile idéalisée est justiciable de la méthode des tranches longitudinales dont on a parlé au chapitre I. Nous allons voir que l'écoulement ne reste pas par tranches longitudinales lorsque l'on tient compte de l'émoussement du bord d'attaque.

Dans le paragraphe 2 nous avons fait un usage constant de la fonction de courant. Dans le cas actuel nous ne disposons pas d'une fonction de courant, mais il est possible d'y substituer une autre notion.

Les variables indépendantes utilisées dans le paragraphe 2 étaient essentiellement l'abscisse –ici x– et la fonction de courant ψ. Dans ces conditions, en désignant par $\mathcal{M}$ un point de l'écoulement, le point était repéré d'une part par sa projection M sur l'axe de symétrie, d'autre part par ψ, mais il est clair que, à ψ il est possible de substituer la cote –dans l'écoulement non perturbé– de la ligne de courant qui passe en $\mathcal{M}$. Désignons par P la trace de la ligne de courant en question sur une droite $x = \text{Cte}$ située en amont du bord d'attaque (*fig.11*). Il est clair que le couple de point (P, M) fournit un repérage parfait du point $\mathcal{M}$.

Le même procédé se laisse utiliser dans le cas actuel. Ainsi, un point $\mathcal{M}(P, M)$ de l'écoulement perturbé, est-il repéré d'une part par sa projection M sur le plan $z = 0$, d'autre part par sa projection M sur le plan $z = 0$, finalement par la trace P sur un plan $x = x_0$, entièrement situé dans la zone non perturbée, de la ligne de courant qui passe en $\mathcal{M}$.

La figure 12 explique ce procédé. La figure 12 a est une vue en projection sur $z = 0$, la figure 12 b est un rabattement du plan $x = x_0$ après amplification considérable des cotes. Le même partage des lignes de courant en deux classes se laisse effectuer, tout comme dans le cas bidimensionnel. Ce partage est basé sur les conditions (1.12) et (1.14) où ici β a une signification évidente. On désigne par (γ) la projection sur le plan xoy d'une ligne de courant $(\mathcal{L})$. La ligne (γ_1) associée à toute ligne de courant du type $(\mathcal{L}_1)$ est évidemment une droite parallèle à ox puisque l'écoulement externe est du type écoulement par tranches longitudinales. Par contre les lignes (γ_2) correspondant aux lignes de courant du type $(\mathcal{L}_2)$, situées dans la couche interne, ne sont pas rectilignes comme nous le verrons.

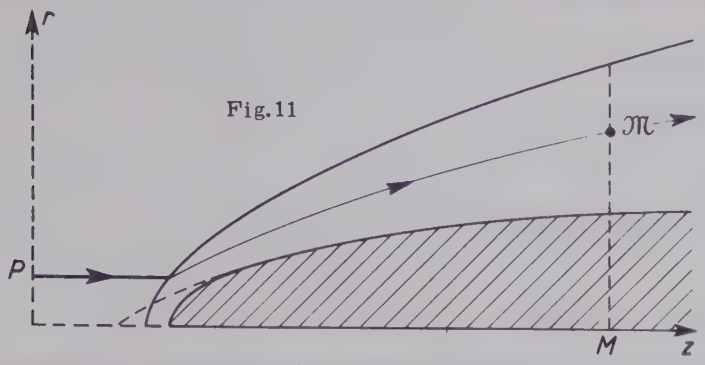


Fig.11

Fixons le point M, alors $\mathcal{M}$ décrit un segment de parallèle à oz compris entre l'obstacle et l'onde de choc, soit $\mathcal{M}_0\,\mathcal{M}_\sigma$, comme l'on voit sur la figure 13. Sur celle-ci, (S) désigne la surface de l'obstacle, (Σ) la surface de l'onde de choc, (S_i) l'analogue de la ligne $(\mathcal{C}_i)$ jouant le rôle de la couche intermédiaire. En dessous de (S_i) il y a la couche interne et en dessus la couche externe. La surface (S_i) joue pour la couche externe le rôle d'un obstacle fictif.

Les lignes (γ) projections des lignes de courant $(\mathcal{L})$ rencontrant le segment $\mathcal{M}_0\,\mathcal{M}_\sigma$ passent toutes par le point M. Il y a une seule ligne (γ_1) mais tout un éventail de lignes (γ_2) compris entre la ligne (γ_0) correspondant au point $\mathcal{M}_0$ et la ligne (γ_i) confondue avec (γ_1) et correspondant au point $\mathcal{M}_i$. Cela est indiqué sur la figure 12 a.

Sur la figure 12 b on a représenté les points P correspondants. On désigne par (E_M) la ligne décrite par le point P lorsque, M restant fixe, le point $\mathcal{M}(P, M)$ décrit le segment $\mathcal{M}_0\,\mathcal{M}_\sigma$. Les points P sont affectés des mêmes indices que les points $\mathcal{M}$ correspondants. La portion (E_{M_1}) de la ligne (E_M) est un segment de droite P_iP_σ parallèle à oz, la portion (E_{M_2}) est un arc de courbe P_0P_i qui n'est pas un segment rectiligne parallèle à oz ceci en raison de la déviation des lignes (γ_2) dans la couche interne.

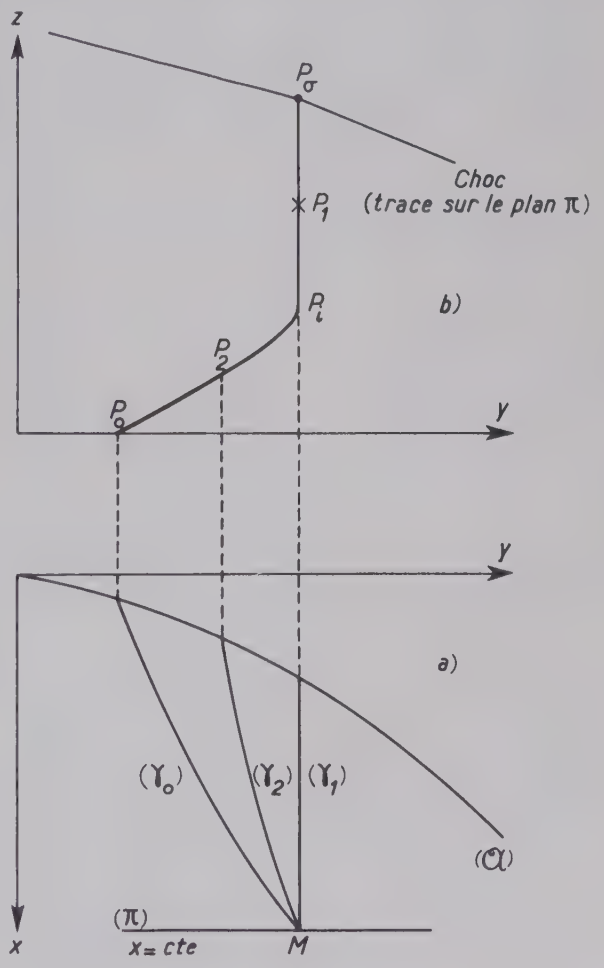


Fig.12

Nous n'allons pas ici procéder à un exposé systématique comme dans la section 2. En effet, ce faisant, nous serions amenés à reprendre un formalisme assez lourd qui, en lui-même, n'apporterait aucun élément nouveau, car les notions de couche externe, couche interne, couche

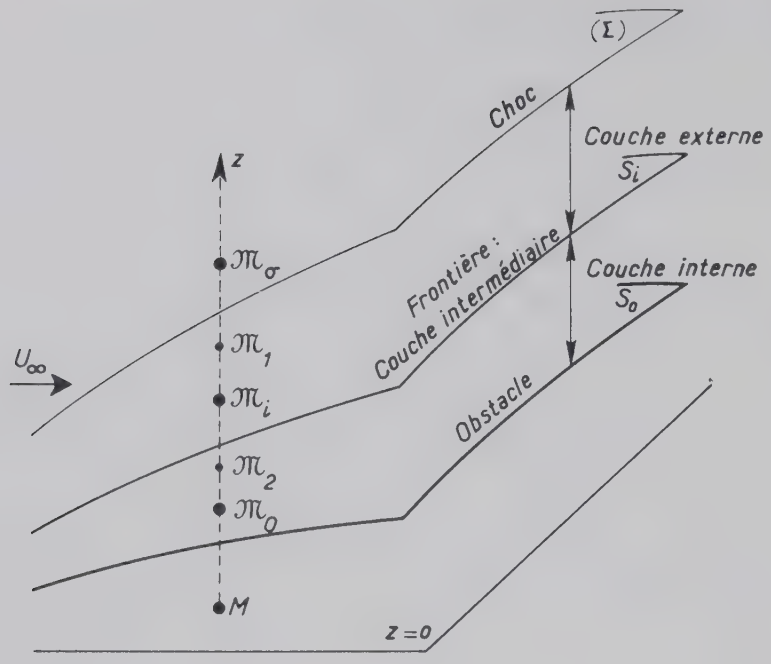

(Σ)
Choc
Couche externe
S_i
z
$\mathcal{M}_\sigma$
Frontière :
Couche intermédiaire
Couche interne
S_o
U_∞
$\mathcal{M}_1$
$\mathcal{M}_i$
Obstacle
$\mathcal{M}_2$
$\mathcal{M}_0$
M
z = 0

Fig.13

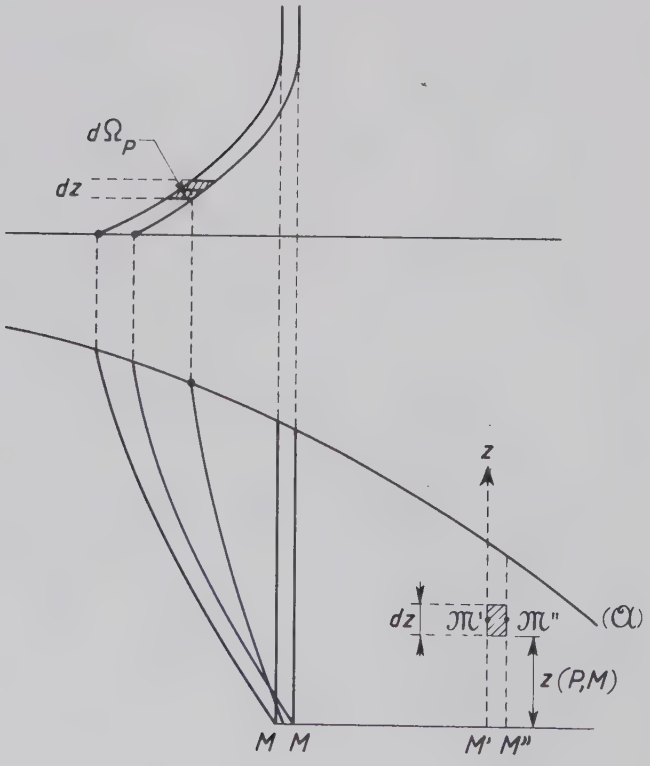

$d\Omega_P$
dz
z
dz
$\mathcal{M}'$
$\mathcal{M}''$
(Ω)
z(P,M)
M M
M' M''

Fig.14

intermédiaire, raccord, ne sont en rien modifiées par le caractère tridimensionnel de l'écoulement, mais qui risquerait par contre de cacher les points nouveaux importants provenant de la structure tridimensionnelle de la couche interne.

Dans ces conditions, sans calcul nouveau, le paragraphe 2.5.2 montre que la vitesse est donnée par

(1) $$V(P, M) = U_\infty ,$$

dans tout l'écoulement. En ce qui concerne la pression, le paragraphe 2.5.1 nous permet de prévoir, ce qui sera vérifié *a posteriori* que

(2) $$p(P, M) = p(M),$$

dans la couche interne. Autrement dit, la pression dans la couche interne est indépendante de la position du point P sin (E_{M_2}).

Maintenant, si le lecteur se reporte au paragraphe 2.4 il se rappelera que ce n'est pas directement la fonction de courant qui intervient dans la description de la couche interne, mais la variable ζ_2 de (2.59). Le même phénomène doit se produire ici, et il nous faut définir un paramètre $\alpha(M_\infty, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F})$ dépendant éventuellement du point M, et une variable $\zeta(P, M)$ permettant de décrire la structure de la couche interne par une formule du type (2.89 d). Pour y parvenir il suffit de faire usage de la conservation de la masse. Soit $M'M''$ un petit segment parallèle à oy entourant le point M, segment dont la longueur est notée $d\gamma_M$. Considérons une petite bande plane parallèle au plan $x = 0$ dont $M'M''$ est la base. Soit dans cette bande un parallélogramme découpé autour du point $\mathcal{M}$ dont l'aire est

(3) $$d\Omega_{\mathcal{M}} = dz d\gamma_M .$$

Lorsque le point $\mathcal{M}$ décrit l'élément d'aire précédent, le point P décrit un élément d'aire $d\Omega_P$ compris entre $(E_{M'})$ et $(E_{M''})$. L'équation de conservation de la masse décrit en désignant par $\vec{t}(P, M)$ le vecteur unitaire tangent à (γ) en M :

(4) $$\rho_\infty U_\infty d\Omega_P \cong \rho(P, M) V(P, P)\, \vec{x} \cdot \vec{t}(P, M) d\Omega_{\mathcal{M}} .$$

Si maintenant l'on utilise la fonction $G(S)$ définie en (1.24), grâce à (1.18) et (1) - (2) nous avons

(5) $$\vec{x} \cdot \vec{t}\, d\Omega_M = G(S) \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} d\Omega_P .$$

Or il est clair que l'on peut écrire, en désignant par z_P la cote du point P,

(6) $$d\Omega_P = F(P, M)\, \vec{x} \cdot \vec{t}(P, M)\, dz_P\, d\gamma_M .$$

La fonction $F(P, M)$ peut être calculée, dès que le réseau des lignes (E_M) est connu. En rassemblant (3) (5) (6) l'on a, en désignant par d_P une différenciation à M fixé,

(7) $$d_P z(P, M) = F(P, M)\, G[S(P)] \left(\frac{p(M)}{p_\infty}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dz_P .$$

Ainsi, il est clair que si l'on pose

(8)
$$\alpha(M; M_\infty, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) = \int_{P_0(M)}^{P_1(M)} G[S(P')]\, F(P', M)\, d\left(\frac{z_P}{a}\right), \qquad a)$$

$$\alpha(M)\, \zeta(P, M) = \int_{P_0(M)}^{P} G[S(P')]\, F(P', M)\, d\left(\frac{z_P}{a}\right), \qquad b)$$

le paramètre α, dépendant du point M, joue exactement le même rôle que α_ε dans le cas des écoulements bidimensionnels, et de même ζ qui varie de 0 à 1 dans la couche interne joue

exactement le même rôle que la variable ζ_2 des formules (2.89).

Soit

(9) $$z = f(M),$$

la surface de l'obstacle, la cote $z(P, M)$ du point $\mathcal{M}_2(P_2, M)$ de la couche interne est donnée par

(10) $$z(P, M) = f(M) + a\alpha(M)\left(\frac{p_\infty}{p(M)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\zeta(P, M).$$

En particulier, l'obstacle effectif sur lequel s'effectue l'écoulement extérieur a pour équation

(11) $$z_{eff}(M) = f(M) + a\alpha(M)\left(\frac{p_\infty}{p(M)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Pour pouvoir achever la description de la couche interne il suffit de savoir déterminer le réseau des lignes (γ). Soit

(12) $$\vec{\tau}(P, M) = \left\{\vec{t}(P, M) + \theta(P, M)\vec{z}\right\}\left(1 + 0(\tau^2)\right),$$

le vecteur unitaire tangent à la ligne de courant $(\mathcal{L})$ passant au point $\mathcal{M}(P, M)$ - dans la formule (11), τ a la signification habituelle en théorie des petites perturbations et $\theta = 0(\tau)$ - . Dans ces conditions, avec

(13) $$V(P, M) = U_\infty[1 + 0(\tau^{2\mu})],$$

l'on a

(14) $$\vec{\nabla}p + \rho U_\infty^2\left\{(\vec{t} + \theta\vec{z}) \cdot \nabla(\vec{t} + \theta\vec{z}) + (\vec{t} + \theta\vec{z})0(\tau^{2\mu})\right\} = 0,$$

de sorte que si

(15) $$\vec{n} = \vec{z} \wedge \vec{t}$$

alors

(16) $$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}p + \rho U_\infty^2\left\{\vec{n} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}\vec{t}) + \theta\vec{n} \cdot (\vec{z} \cdot \vec{\nabla}\vec{t})\right\} = 0.$$

Maintenant, soit s l'arc de la ligne de courant, l'expression

(17) $$(\vec{t} + \theta\vec{z}) \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{ds}$$

désigne une dérivation en suivant la ligne de courant $(\mathcal{L})$. Soit σ l'arc de la ligne (γ) projection de $(\mathcal{L})$, il est évident que

(18) $$\frac{d\sigma}{ds} = 1 + 0(\tau^2),$$

de sorte qu'il est possible d'écrire

(19) $$(\vec{t} + \theta\vec{z}) \cdot \vec{\nabla} = [1 + 0(\tau^2)]\frac{d}{d\sigma},$$

en désignant par $d/(d\sigma)$ une dérivation en suivant la ligne (γ). Dans ces conditions, $\vec{\nabla}_M^{(0)}$ désignant l'opérateur vectoriel de dérivation dans le plan $z = 0$, opérant - en représentation $\mathcal{M}(P, M)$ - sur les coordonnées du point M, les coordonnées du point P étant fixées, il est clair que la transcription de (16) en représentation $\mathcal{M}(P, M)$, s'écrit, compte tenu du fait que p ne dépend que de M :

(20) $$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_M^{(0)}p + \rho U_\infty^2\left\{\vec{n} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}_M^{(0)}\vec{t}) + 0(\tau^2)\right\} = 0.$$

Finalement, compte tenu de la valeur de ρ, d'équation différentielle intrinsèque des courbes (γ) est obtenu sous la forme

(21) $$\vec{n}(M) \cdot \left(\vec{t}(P, M) \cdot \vec{\nabla}_M^{(0)}\vec{t}(P, M)\right) + \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_\infty(\bar{\gamma} - 1)}\frac{G(S(P))}{M_\infty^2}\vec{n}(M) \cdot \vec{\nabla}_M^{(0)}\left(\frac{p(M)}{p_\infty}\right)^{\frac{\bar{\gamma} - 1}{\bar{\gamma}}} = 0.$$

Il est clair que l'équation (21) permet de déterminer les courbes (γ) à condition, toutefois, de disposer d'une condition initiale. Or il est possible de se convaincre que la condition initiale en question est donnée par le fait que les lignes (γ) quittent le bord d'attaque $(\mathcal{C})$ de l'obstacle idéalisé parallèlement à ox. En effet, dès que l'épaisseur du bord d'attaque a est très petite par rapport au rayon de courbure de la courbe $(\mathcal{C})$, le bord d'attaque peut être localement assimilé à un cylindre en attaque oblique, et la proposition précédente devient évidente - noter que pour l'obstacle idéalisé une théorie par tranches longitudinales a été supposée valable.

Sur la figure 15 un éventail de lignes (γ) issues d'un point I de $(\mathcal{C})$ a été représenté. La ligne (γ_i) projection d'une ligne de courant $(\mathcal{L}_i)$ tracée dans la couche intermédiaire, c'est-à-dire sur l'obstacle fictif frontière commune aux couches interne et externe, est parallèle à ox. Les autres lignes (γ_2) projections de lignes du type $(\mathcal{L}_2)$ tracées dans la couche interne sont déviées vers les régions de plus faible pression. La ligne la plus déviée (γ_0) est celle qui est tracée sur l'obstacle réel lui-même.

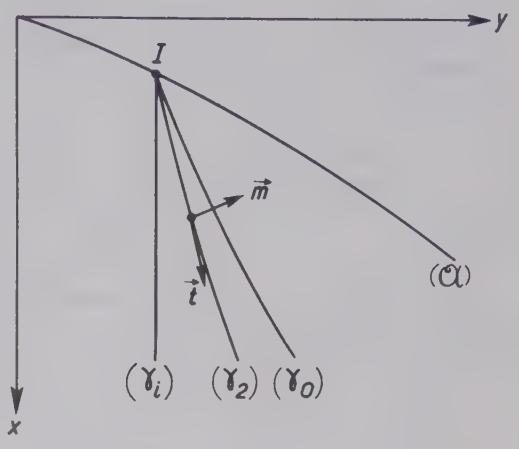


Fig.15

Le lecteur pourra, s'il le désire, vérifier la constance de p le long d'un segment $\mathcal{M}_0\mathcal{M}_i$, en établissant une équation analogue à (2.68) lorsque l'on prend comme variables indépendantes M et G.

Les divers résultats obtenus dans cette section sont maintenant rassemblés.

La détermination de l'écoulement sur une aile même aplatie sur un plan $z = 0$ et comportant un bord d'attaque émoussé d'épaisseur a devrait s'effectuer en trois étapes suivant le schéma de principe suivant.

PREMIÈRE ÉTAPE. Un point de l'aile étant repéré par sa projection M sur le plan d'aplatissement $z = 0$, la première étape consiste à résoudre le problème suivant. Pour une répartition de pression donnée arbitraire, $p(M)$, déterminer les courbes $(\gamma(I, S))$, courbes intégrales du champ de vecteurs unitaires $t(S, M)$ vérifiant l'équation

$$(22)\qquad (\vec{z}\wedge\vec{t})\cdot(\vec{t}\cdot\vec{\nabla}^{(0)}_{M}\vec{t}) + \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_\infty(\bar{\gamma}-1)M_\infty^2}G(S)(\vec{z}\wedge\vec{t})\cdot\vec{\nabla}^{(0)}_{M}\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}} = 0,$$

et la condition initiale

$$(23)\qquad \vec{t}(S, M) = \vec{x}\ , \quad \text{pour } M\in(\mathcal{C}).$$

Lorsque ceci a été fait, collecter toutes les lignes (γ) passant par un point donné M. Connaissant l'entropie S attachée à chaque ligne (γ), et son point initial I, lorsque la forme de l'onde de choc dans la région du bord d'attaque est connue, il est possible d'associer à chaque ligne (γ) un point P qui soit la trace sur le plan $x = x_0$, entièrement situé dans l'écoulement non perturbé, de la ligne de courant – spatiale – dont (γ) est la projection. Après avoir collecté, comme il a été dit, toutes les lignes (γ) qui passent en M, la correspondance précédente qui associe un point P à chaque ligne (γ) permet de trouver la ligne (E_M) qui, par la correspondance $\mathcal{M} \to (P, M)$ est l'image du segment vertical $\mathcal{M}_0\mathcal{M}_\sigma$ compris entre l'obstacle et l'onde de choc dont la trace sur $z = 0$ est M.

Déterminer ensuite la fonction $F(P, M)$ dont la définition est donnée en (6), et l'utiliser pour calculer

$$(24)\qquad \alpha(M; M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; \mathcal{F}) = \int_{P_0(M)}^{P_i(M)} G[S(P')]F(P', M)\,d\left(\frac{z'}{a}\right).$$

Lorsque la résolution de ce premier problème est achevée la fonction α définie en (24) apparaît comme une fonctionnelle de $p(M)$:

$$\alpha(M) = \mathcal{K}\left(\frac{p(M)}{p_\infty}\right). \tag{25}$$

DEUXIÈME ÉTAPE. Pour un obstacle de forme arbitraire

$$z = g(M) \tag{26}$$

résoudre, avec des conditions initiales dont la forme est encore incertaine, les équations de la théorie hypersonique des petites perturbations. La résolution de ce problème –résolution toute hypothétique d'ailleurs– doit faire apparaître la pression $p(M)$ sur l'obstacle comme fonctionnelle de $g(M)$:

$$p(M) = p_\infty\, \mathcal{K}(g(M)). \tag{27}$$

TROISIÈME ÉTAPE. Résoudre l'équation fonctionnelle

$$\left\{\mathcal{K}(g(M))\right\}^{\frac{1}{\gamma}}[g(M) - f(M)] = a\, \mathcal{K}\,(\mathcal{K}[g(M)]). \tag{28}$$

Il est inutile d'insister sur l'extrême complexité du programme précédent. Il paraît également difficile d'énoncer quelque règle de similitude, dès que doit intervenir le caractère tridimensionnel de l'écoulement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.K. CHENG. – *Similitude of hypersonic real gas flows over slender bodies with blunted noses.* J.A.S., *26*, 9, 575-95 (1959).

[2] G.G. CHERNYI. – *Ecoulement hypersonique d'un gaz idéal sur un obstacle.* IZV. AKAD NAUK SSSR O T N nº 6, 77-85 (1957).

[3] G.G. CHERNYI. – *Ecoulement hypersonique sur un profil avec un bord d'attaque légèrement émoussé.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *114*, 721-24 (1957).

[4] G.G. CHERNYI. – *Ecoulement hypersonique sur un cône émoussé.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *115*, 681-83 (1957).

[5] G.G. CHERNYI. – *Effet de l'émoussement du nez sur l'écoulement hypersonique autour d'un obstacle.* IZV. Akad. Nauk SSSR O T N nº 4, 54-66 (1958).

[6] W. CHESTER. – *Supersonic flow past a bluff body with a detached shock. Pont 1 : Two dimensionnal body.* Journal Fluid Mecanics *1*, 353-65 (1956). *Pont 2 : Axisymmetric body.* Journal Fluid Mecanics *1*, 490-96 (1956).

[7] J.D. COLE. – *Newtonian flow theory for slender bodies.* J.A.S., *24*, 448-455 (1957).

[8] A.J. EGGERS. – *On the circulation of flow about objects travelling at high supersonic speeds.* N.A.C.A. TN 2811.

[9] A.J. EGGERS, R.C. SAVIN & C.A. SYVERTSON. – *The generalised shock expansion method and its applications to bodies travelling at high supersonic air speeds.* J.A.S., *22*, 231-38 (1955).

[10] A.J. EGGERS & C.A. SYVERTSON. – *Inviscid flow about airfoils at high supersonic speeds.* N.A.C.A. TN 2646.

[11] P.S. EPSTEIN. – *On the air resistance of projectiles.* Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. *17*, 532-47 (1931).

[12] N.C. FREEMANN. – *On the theory of hypersonic flow past plane and axially symmetric bluff bodies.* Journal of Fluid Mechanics *1*, 366-87 (1956).

[13] K.O. FRIEDRICHS. – *Formation and decay of shok waves.* Comm. pure Appl. Math., *1*, 211 (1948).

[14] P. GERMAIN & R. GUNDERSEN. – *Sur les écoulements unidimensionnels d'un fluide parfait à entropie faiblement variable.* Comptes rendus, t. 241, 925 (1955).

[15] J.P. GUIRAUD. – *Ecoulements hypersoniques infiniment voisins de l'écoulement sur un dièdre.* Comptes rendus, t.244, 2281-84 (1957).

[16] J.P. GUIRAUD. – *Ecoulements supersoniques bidimensionnels derrière une onde de choc attachée.* Comptes rendus, t.245, 2474-76 (1957).

[17] J.P. GUIRAUD. – *Gradient de pression initial à la pointe d'un profil.* Comptes rendus, t.246, 229-31 (1958).

[18] J.P. GUIRAUD. – *Ecoulements hypersoniques tridimensionnels dans une couche de choc d'épaisseur évanescente.* La Recherche Aéronautique, n° 71, Juillet-Août 1959.

[19] J.P. GUIRAUD. – *Newtonian flow over a surface. Theory and applications.* Dans Hypersonic flow, vol.XI des COLSTON Papers BUTTERWORTH Londres 1960.

[20] J.P. GUIRAUD. – *Sur la méthode de choc détente.* Comptes rendus, t.245, 1778-80 (1957).

[21] J.P. GUIRAUD. – *Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une plaque plane comportant un bord d'attaque d'épaisseur finie.* Comptes rendus, t.246, 2842-45 (1958).

[22] J.P. GUIRAUD. – *Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une aile mince comportant un bord d'attaque émoussé.* Comptes rendus, t.248, 3524-26 (1959).

[23] R. GUNDERSEN. – *The flow of a compressible fluid with weak entropy changes.* Journal of fluid Mechanics, *3*, 6, 553-81.

[24] A.G. HAMMITT & S.M. BOGDONOFF. – *Hypersonic studies of the leading edge effect on the flow over a flat plate.* Jet propulsion, *26*, 241-46 (1956).

[25] W.D. HAYES. – *On hypersonic similitude.* Quarterly of applied mathematics, *5*, 105-106 (1947).

[26] W.D. HAYES & R.F. PROBSTEIN. – *Hypersonic flow theory.* Academic Press, New York (1959).

[27] W.D. HAYES & R.F. PROBSTEIN. – *Viscous hypersonic similitude.* J.A.S., *26*, 12, 815-25 (1959).

[28] R.T. JONES. – *Properties of low aspect ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound.* N.A.C.A. Rep. 835 (1946).

[29] S. KAPLUN. – *The role of coordinate systems in boundary layer theory.* Z.A.M.P., *5*, 2 95-150 (1954).

[30] A.N. KOGAN. – *An application of CROCCO's stream function to the study of rotational supersonic flows past airfoils.* Quarterly Journal of mechanics and appl. mathematics., *11*, 1-23 (1958).

[31] T. KUBOTA. – *Investigation of flow around simple bodies in hypersonic flow.* GALCIT Memo n° 40 hypersonic research project (1957).

[32] M.T. LANDAHL. – *Unsteady flow around thin wings at high Mach members.* J.A.S., *24*, 1, 33-38 (1957).

[33] P. LAVAL. – *Ecoulements newtoniens sur des surfaces coniques à incidence.* La Recherche Aéronautique, n° 73, nov.-déc. 1959.

[34] L. LEES. – *a) Recent developments in hypersonic flows.* Jet propulsion, *27*, 11, 1162-78 (1957). *b) Hypersonic flow.* I.A.S. Prepint 554 (1955). Proc. 5e Int. Aero. conf. LOS ANGELES 241-276 (1959).

[35] L. LEES & T. KUBOTA. – *Inviscid hypersonic flow over blunt nosed slender bodies.* J.A.S., *24*, 3, 195-202 (1957).

[36] M.J. LIGHTHILL. – *Dynamics of a dissociating gas. Pont 1 - Equilibrium flow.* Journal of fluid mecanics, *2*, 1-32 (1957).

[36 a] M.J. LIGHTHILL. – *Oscillating airfoils at high Mach numbers.* J.A.S., *20*, 402 (1955).

[37] J.F. MAHONY. – *A critique of shock expansion theory.* J.A.S., *22*, 673-680 (1955).

[38] R.E. MEYER. – *On supersonic flow behind a curved shock.* Quarterly of applied mathematics, *14*, 433-36 (1957).

[39] J.W. MILES. – *Unsteady flow at hypersonic speeds.* Dans Hypersonic flow. vol.XI des COLSTON Papers. BUTTERWORTH Londres 1960.

[40] W. MOEKEL. – *Oblique shock relations at hypersonic speeds for air in chemical equilibrium.* N.A.C.A. TN 3895 (1957).

[41] E. PICARD. – *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles.* Cahiers scientifiques, fascicule 1. GAUTHIER VILLARS - (1950).

[42] Maurice ROY. – *Tuyères, trompes, fusées et projectiles. Problèmes divers de dynamique des fluides aux grandes vitesses.* Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 203 (1947).

[43] R.C. SAVIN. – *Application of the generalised shock expression method to inclined bodies of revolution travelling at high supersonic speeds.* N.A.C.A. TN 3349.

[44] L.I. SEDOV. – *Similarity and dimensional methods in mechanics.* Traduct. M. HOLT Academic Press NY (1959). Gostekhizdat SSSR 4e édition 1957.

[45] *Staff of the computing section, center of analpis (under the direction of zdeneck KOPAL).* Tables of supersonic flow around cones. M.I.T. Tech . Rep. 1 (1947).

[46] K. STEWARTSON. – *On the motion of a flat plate at high speeds in a visious compressible fluid. Part.1 : Impulsive motion* : Proc. Camb. Phil. Soc., *51,1*, 202-19 (1955). *Part.2 : Steady motion* : J.A.S., *22*, 303 (1955).

[47] H.S. TSIEN. – *Similarity laws of hypersonic flows.* Journal of math. and physics, *25*, 247-51 (1946).

[48] M.D. VAN DYKE. – *A study of hypersonic small disturbance theory.* N.A.C.A. Rep. 1194.

[49] M.D. VAN DYKE. – *Applications of hypersonic small disturbance theory.* J.A.S., *21*, 179-81 (1954).

[50] G.D. WALDMAN & R.F. PROBSTEIN. – *An analytic extension of shock expansion method.* WADC TN 57-214 Div. of Aero Eng. Brown Univ. Providence 1957.

Achevé d'imprimer à l'O.N.E.R.A., Mai 1962, Dépôt légal 2e trimestre 1962, n°210.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LE PROBLÈME AUX VALEURS INITIALES POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES

Vu et approuvé :
Paris, le 10 Décembre 1962
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE